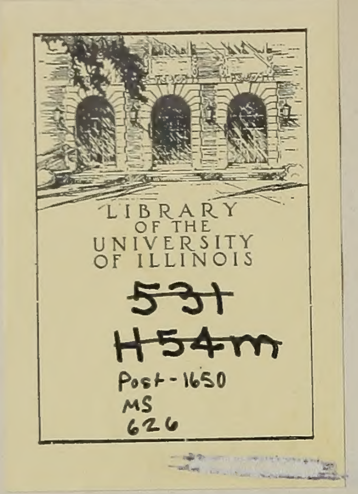



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS
531
H54m
Post-1650
MS
626

Lectures on Mechanics
by Professor Hilbert at Goettingen
in 1905-6, with much use of the
calculus of variations.

Arthur R. Crathorne.

Up to page 214 these notes are as taken during the lectures. From page 214 on, the notes are a copy of the "Ausarbeitung" in the Lesezimmer and cover the same ground as pages 138 - 214.

Mechanik.

Professor Hilbert.

Winter Semester 1905-6.

Mon. and Thurs. 9 - 11.

Prof. Hilbert: Mechanik.

Einleitung: Lehrbuchlitteratur. Page 1.

Cap. I. Mechanik eines Massenpunktes.

§ 1. Begriff des Vektors. 3

§ 2. Kinematik eines Punktes. 5

Beschreibung der Bewegung,
Geschwindigkeitsvektor,
Beschleunigungsvektor,
Tangential- und Normalbeschleunigung.

§ 3. Der freie Massenpunkt unter dem Einflusse einer Kraft. 14

1) Gegebenes Geschwindigkeitsfeld.

2) Gegebenes Kraftfeld: Die Newtonschen Gleichungen.

Einteilung der Beispiele.

§ 4. Fall, Wurf, Schwingung, Planetenbewegung. 21

1) Konstante Kraftfelder: Fallbewegung. Wurfbewegung.

2) Centralkräfte: Elastische Schwingung, Gravitationsbewegung um einen festen Punkt.

3) Zwei allgemeine Sätze von Bertrand und Darbouse — Halphen.

§ 5. Fall und Schwingung im widerstehenden Medium, gedämpfte Bewegung. Webers elektrisches Grundgesetz. 35

1) Widerstandskraft proportional v^2. Vertikaler Wurf, schiefer Wurf.

2) Widerstandskraft proportional v. Gedämpfte Schwingung.

3) Kraft von der Beschleunigung abhängig: Webers elektrodynamisches Grundgesetz.

§ 6. Erzwungene Schwingung. Darwinsches Dreikörperproblem, Lawinensturz. 43

1) Erzwungene elastische Schwingung, Bemerkungen über Anwendungen

2) Darwinsches Dreikörperproblem.

3) Lawinensturz.

§ 7. Bedingte Bewegung eines Massenpunktes. 47

1) Uebersicht über die Arten von Bedingungen.

2) Das Gausssche Prinzip des kleinsten Zwanges.
Ableitung der Lagrangeschen Gleichungen.
Allgemeine Bedeutung des Gaussschen Prinzips (Ungleichungen als Bedingungen etc.)

3) Das Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn.
Ableitung aus den Lagrangeschen Gleichungen der kräftefreien Bewegungen.
Beweis der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Prinzip.

Gauss'sches und Hertz'sches Prinzip

Darstellung des Weber'schen Gesetzes durch einen Mechanismus nach Koenigsberger.

§ 13. Schwerpunkts- und Flächensätze für innere Kräfte und Bedingungen. 126

Erläuterung an zahlreichen Beispielen (lebende Wesen).

§ 14. Satz von der Erhaltung der Energie. 214

Poincarés Satz von den 10 eindeutigen Integralen des Dreikörperproblems. Integralprinzipien von Hamilton, Euler, Jacobi. Uebergang zu unabhängigen Parametern des Systems. Lagrangesche Gleichungen 2. Art, Einführung der Lagrangeschen Function.

§ 15. Methoden der Variationsrechnung. 237

Allgemeine Auffassung der Variationsrechnung als Theorie der Functionen von Functionen.

Aufstellung aequivalenter Variationsprobleme zu einem gegebenen $\int_{x_1\,y_1\,z_1}^{x_2\,y_2\,z_2} F\,(y', z', y, z)\; d\,x = \text{Min.}$ durch Einführung von $y' = p$, $z' = q$ als neue Unbekannte.

Der Unabhängigkeitssatz; Anwendung zur Ableitung hinreichender Kriterien.

Berechnungsgesetze der Minimalkurven an Unstetigkeitsflächen des Integranden F $(y'\,z'\,y\,z\,x)$ im $x-y-z$ Raume,

Ausblick auf die Jacobi-Hamiltonsche Theorie.

Transformation des Variationsproblems auf aequivalente.

Das kanonische Variations-Problem und die kanonischen Gleichungen. Das kanonische Problem als Forderung des Maximums eines Minimums.

Kanonische Transformationen. Einige Sätze aus der Lieschen Gruppentheorie. Einparametrige kontinuierliche Gruppen kanonischer Transformationen in sich u. Zusammenhang mit der Integration der kanonischen Gleichungen.

Fundamentalsatz der Zusammensetzung von Integralen-Aufstellung aequivalenter Variationsprobleme durch Elimination von Unbekannten:

1) Benutzung des Integrals $F_{z'} = \text{const} = c$, wenn F z nicht enthält. Aequivalent sind bei gegebenem c ein neues Variations-Problem ohne Nebenbedindung $\int_{x_1\,y_1}^{x_2\,y_2} \left(F\,(y', z', y) - c\,z' \right) d\,x = \text{Min}$, eines aus Nebenbedingung $F_{z'} = c$ (im speziellen Falle das Euler-Manpertiuis'sche) und eines für y allein (das Jacobische).

2) Benutzung eines beliebigen Integrals $\Phi\,(K, \pi, y, z,) = c$

der kanonischen Gleichungen. Zurückführung auf den vorigen Fall mit Hilfe einer kanonischen Transformation u. Herleitung eines aequivalenten kanonischen Variations-Problems mit 2 statt 4 Unbekannten.

336 § 16. Anwendung der Variations-Rechnung auf die Integrationstheorie der Gleichungen der Mechanik.

Der Energiesatz.

Die zu den Schwerpunkts- und Flächenintegralen gehörigen Gruppen von Translationen und Rotationen des Raumes, die das mechaniche Problem in sich überführen.

347 § 17. Anwendung der Variations-Rechnung auf die Integralprinzipe.

Ein neues Prinzip der Mechanik:

$$\int_A^B (T - U + E)\, dt = \text{Min}$$ (ohne Nebenbedingung) bei gegebenem Anfangs- und Endort und gegebener Anfangsenergie E (die Zeit ist nicht gegeben). Ableitung des Euler-Maupertuisschen und Jacobischen Prinzips aus ihm.

Elimination einer Coordinate aus dem Hamiltonschen Prinzip mit Hilfe der Schwerpunkts- und Flächenintegrale.

362 § 18. Die Lagrangesche Funktion.

Darstellung allgemeiner physikalischer Vorgänge durch ein Variationsproblem nach Art des Hamiltonschen Prinzips bezw. durch eine Lagrangesche Funktion. Webersches Gesetz und Bewegung eines Elektrons als Beispiele.

Ueberführung der Lagrangeschen Funktion $L = T - U$ der Mechanik in allgemeine Formen durch Elimination von Coordinaten in 3 Fällen:

1) L enthält einige Coordinaten, z selbst nicht (Cyklische Bewegung nach Lord Kelvin und Helmholtz).
2) Die Variationsableitungen enthalten z und z' nicht. (Königsberger).
3) Es ist eine Bewegung z = const. möglich. (Unvollständige Probleme nach Helmholtz).

Reciprocitätsgesetze der Lagrangeschen Funktion nach Helmholtz u. J. J. Thomson.

387 § 19. Das Gleichgewicht.

Labiles und stabiles Gleichgewicht. Der Satz von Dirichlet.

Kleine Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage.

398 § 20. Anwendung der Variationsrechnung auf die Theorie der Impulse.

Oct. 24
(1), (2)

Definition of Mechanics according to Kirchoff.

Position of Mechanics between pure Mathematics and Natural Science. Geometry and Mechanics are somewhat similar in this respect but Geometry has grown into pure mathematics. Mechanics has not yet reached this point.

The treatment in this course will be somewhat elementary.

Literature.

Lagrange, Mechanique Analitique 1788.
Jacobi, Dynamic. 1843
Kirchoff, Vorlesungen über Mech. 1877.
Thomson and Tait. 1871.
Petersen, Kinematic, Static Dynamic. 1884
Bausenberger, An. Mech. 1888.
Voigt. Elementar Mech. 1889.
Hertz. Princip Mechanic, 1894 } Foundations of Mech.
Boltzman " " } Foundations of Mech.

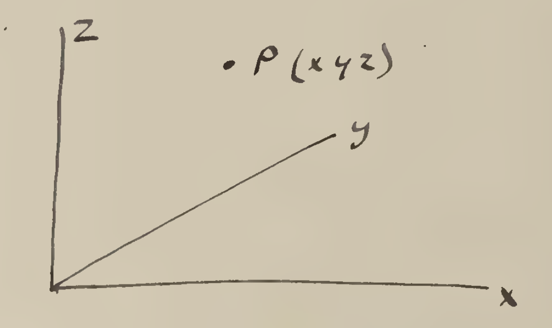
<u>Hertz's</u> work is especially to be noted.

Helmoltz. Dyn. 1894
Appell. 1893
Routh. Dynamics 1897
Düring 1893 } Historical
Mach }
Fuhrman } collections of Problems.
Zech }
Poincare. Mech. Celest. 1892
Klein - <u>Sommerfeld</u> - Kreis Theorie.

Scheme of the Vorlesungen.

I. Mechanik eines Massenpunkt.
II. " " Systems endlich viel Punkte.
III. " " Continua.

Begriff des vectors.



P is fixed by x y z. Think of some number which is associated with P. and which can be represented by f(xyz). We call this a Scalar. The space in which P moves is a Scalar field. Idea of Scalar

Several functions like f(xyz) may be given in connection with P. Let them be three say

$a_x, \quad a_y, \quad a_z$

Such a tripel of 3 scalar functions gives us a vector which is called a.

Connecting P with origin gives us a direction. We say a is "angeheftet" on the origin but it may be " on any point.

a_x, a_y, a_z may be functions of x y z and "angeheftet" on x y z itself. We

vector field. speak then of a vector field. Or to each point in space a vector belongs.

$$\begin{cases} x + a_x \\ y + a_y \\ z + a_z \end{cases}$$

P (x y z)

Length of a vector is represented by $|a|$ or A. and equals

$$\left| \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \right|$$

Direction cosines are

$$\cos(x, a) = \frac{a_x}{|a|}$$

$$\cos(y, a) = \frac{a_y}{|a|}$$

$$\cos(z, a) = \frac{a_z}{|a|}$$

Addition and mul. vectors.

$$a + B = (a_x + B_x,\ a_y + B_y,\ a_z + B_z)$$

= a vector.

Easy to show by parallelogram construction.

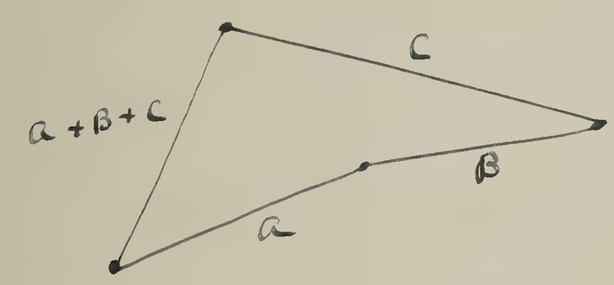
$m\mathfrak{a} = (m\mathfrak{a}_x, m\mathfrak{a}_y, m\mathfrak{a}_z)$

Angle between two vectors is given by

$$\cos(\mathfrak{a}\mathfrak{B}) = \frac{\mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{B}_x + \mathfrak{a}_y \cdot \mathfrak{B}_y + \mathfrak{a}_z \cdot \mathfrak{B}_z}{|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{B}|}$$

Several vectors may be added according to above method.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{a}.$$



$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_x, 0, 0) + (0\ \mathfrak{a}_y\ 0) + (0, 0, \mathfrak{a}_z)$

is a special case of resolving $\mathfrak{a}$ into its 3 components.

Kinematics eines Punktes

Motion is known when $x\,y\,z$ are known functions of the time t. Eliminate t and get $\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ z = g(x) \end{matrix}\right\}$ = path curve.

Not only must our functions be continuous but the derivatives must also be continuous.

Length of the arc from $t=0$ to $t=t$ is

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Geschwindigkeit at time t is

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt}$ gives Direction or the 3 components of the velocity vector

or $\quad W = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

Let $P(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$

then $W = \frac{dP}{dt}$.

Direction of the velocity is given by

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{|W|}, \quad \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{|W|}, \quad \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{|W|}$$

Beispiel

$x = at + a'$
$y = bt + b'$
$z = ct + c'$

$$W = (a, b, c) = \text{const.}$$

Path is $\begin{cases} y = b\,\frac{x-a'}{a} + b' \\ z = c\,\frac{x-a'}{a} + c' \end{cases}$

Also $x = \sin t$
$y = 0$
$z = 0$

$$W = (\cos t, 0, 0)$$

Path = x axis.

angular velocity

Motion in a plane circle may be represented.

$x = \rho \cos \vartheta$
$y = \rho \cos \vartheta$

or $\rho = \rho(t)$
$\vartheta = \vartheta(t)$

then $\frac{d\vartheta}{dt}$ = angular velocity

$$= \frac{d \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$$

Beschleunigung vector.

$$\mathfrak{L} = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2 P(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

$$|\mathfrak{L}| = \left| \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \right.$$

Direction is given by.

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{|\mathfrak{L}|}, \quad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{|\mathfrak{L}|}, \quad \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{|\mathfrak{L}|}$$

In the first Beispiel on vectors there is no Beschleunigung. The most general motion with constant Beschleunigung is:

$$x = at^2 + a't + a''$$
$$y = bt^2 + b't + b''$$
$$z = ct^2 + c't + c''$$

$$w = (2at + a', \ 2bt + b', \ 2ct + c')$$

$$\mathfrak{L} = (2a, 2b, 2c)$$

Oct. 30
(3). (4)

Vector $(x(t), y(t), z(t)) = \mathfrak{a}$ ist mit Zeit veränderlich.

Geschwindigkeit ist ein Vector $\mathfrak{w}$

$$(\mathfrak{w}_x, \mathfrak{w}_y \ \ \mathfrak{w}_z) = \mathfrak{w}$$

$$\mathfrak{w}_x = x' \qquad \mathfrak{w}_y = y', \qquad \mathfrak{w}_z = z'$$

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt}$$

Beschleunigungsvector $= \mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{a}}{dt^2}$

oder $\mathfrak{b} = (x'', y'', z'') = (\mathfrak{b}_x, \mathfrak{b}_y, \mathfrak{b}_z)$.

$\mathfrak{a} + \mathfrak{w} =$

$x = x(t) + x'(t)$	$x = x(t) + x''(t)$
$y = y(t) + y'(t)$	$y = y(t) + y''(t)$
$z = z(t) + z'(t)$	$z = z(t) + z''(t)$

x
y
z
t
x+x'
y+y'
z+z'
x+x''
y+y''
z+z''

Equation of oscillating plane.

Nun bekommen wir Schmiegungsebene

$$uX + vY + wZ + 1 = 0$$

$X\,Y\,Z$ = laufende Coordinaten Ebene.

Es geht durch $x\,y\,z$ so haben wir

$$u\,x(t) + v\,y(t) + w\,z(t) + 1 = 0$$

auch

$$u\,x'(t) + v\,y'(t) + w\,z'(t) = 0$$

$$u\,x''(t) + v\,y''(t) + w\,z''(t) = 0$$

Wir haben 3 Gleichungen für u, v, w

Wir können $u\,(X - x(t)) + v\,(Y - y(t)) + w\,(Z - z(t))$

brauchen statt die erste.

Denn ist unser Schmiegungsebene

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ x', & y', & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Leicht zu zeigen dass unser Geschwindigkeit vector auch Beschleunigungs vector in diese Ebene liegen.

Nun zerlegen Beschleunigungs vector in 2 Componenten in unser Schmieg. ebene. Erst in Richtung tangent, Zweite in Richtung normal zu.

Separation of acceleration vector into components

$$\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\ \cos(\mathcal{L},W) =$$

$$\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\cdot\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\ \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}$$

$$= \frac{x'x''+y'y''+z'z''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{d\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{dt}$$

$$= \frac{dV}{dt}, \equiv T \text{ wo } V = \text{Skalar grösse } |W|$$

= tangential componente der Beschleunigung.

Begriff Krümmungs Kreis.

Nehmen 3 Benachbar punkte auf unser curve. Legen Kreis durch diese Punkte. etc.

Mittlepunkt dieser Kreis in unser Schmieg. ebene liegt.

Idea of curvature; to be used in finding the component // to normal.

Lessen wir einer Curve mit

$$x = \xi(s)$$
$$y = \eta(s)$$
$$z = \zeta(s).$$

Take arbitrary Sphere with center on our plane.

$$(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2 = \rho^2$$

with equation of Schmiegungsebene we get a circle.

We have also {because the sphere goes through the 3 neighboring points.

(2) $$(\xi(s)-\lambda)^2 + (\eta(s)-\mu)^2 + (\zeta(s)-\nu)^2 = \rho^2$$

(3) $$(\xi(s)-\lambda)\frac{d\xi}{ds} + (\eta(s)-\mu)\frac{d\eta}{ds} + (\zeta-\nu)\frac{d\zeta}{ds} = 0$$

(4) $$(\xi-\lambda)\frac{d^2\xi}{ds^2} + (\eta-\mu)\frac{d^2\eta}{ds} + (\zeta-\nu)\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \underbrace{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2}_{=1} = 0$$

We have 4 equations to find the 4 quantities λ, μ, ν, ρ.

{(1) is the equation of Schmiegungsebene}

Out of (1) and (2) we get

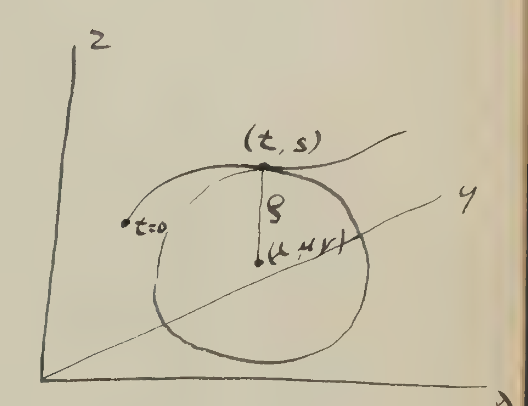
$$\lambda - \xi : \mu - \eta : \nu - \zeta = \frac{d^2\xi}{ds^2} : \frac{d^2\eta}{ds^2} : \frac{d^2\zeta}{ds^2}$$

or $\lambda - \xi = c\,\frac{d^2\xi}{ds^2}$

$\mu - \eta = c\,\frac{d^2\eta}{ds^2}$ finally we get

$\nu - \zeta = c\,\frac{d^2\zeta}{ds^2}$

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2}}\\ \lambda &= \xi + \rho^2\frac{d^2\xi}{ds^2}\\ \mu &= \eta + \rho^2\frac{d^2\eta}{ds^2}\\ \nu &= \zeta + \rho^2\frac{d^2\zeta}{ds^2}\end{aligned}\right\}$$



$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

$$K = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2}$$

Nun können wir unser normal component der Beschleunigung bekommen.

$$N = \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\cdot\cos(\mathcal{L}, \rho)$$

$$= \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\cdot\frac{x''\frac{d^2\xi}{ds^2}+y''\frac{d^2\eta}{ds^2}+z''\frac{d^2\zeta}{ds^2}}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{K}\left(x''\frac{d^2\xi}{ds^2}+y''\frac{d^2\eta}{ds^2}+z''\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)$$

$$\frac{ds}{dt}\frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\xi}{ds}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2\xi}{ds^2} = x''$$

Auch

$$\frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\eta}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\eta}{ds^2} = y''$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}\frac{d\zeta}{ds} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2\zeta}{ds^2} = z''$$

Multiply by $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, $\frac{d^2\eta}{ds^2}$, $\frac{d^2\zeta}{ds}$ respectively, add and get.

$$N = \frac{1}{K}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 K^2 = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = KV^2$$

= Krümmung mal (skalar Teil Geschwindigkeit)^2

So N and T both depend on V, T contains t but N not. T does not have any thing to do with radius of curvature. For motion in a straight line $N = 0$.

Freie Massen Punkt unter-dem Einflusse einer Kraft.

Paragraph III.

Assume we know Geschwindigkeits vector (only)

$$\frac{da}{dt} = W = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

but not a.

$$x(t) = \int_0^t x'\,dt ,$$

$$y(t) = \int_0^t y'\,dt$$

$$z(t) = \int_0^t z'\,dt$$

But suppose we have only a Geschwindigkeits feld given.

Point moves in this feld with velocity of points in feld.

$W = W_x(xyz) \quad W_y(xyz), \quad W_z(xyz)$ = Gesch. feld = gegeben

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= W_x(xyz) \\ \frac{dy}{dt} &= W_y(xyz) \\ \frac{dz}{dt} &= W_z(xyz) \end{aligned}\right\} = 3 \text{ differential equations which when integrated yield 3 constants}$$

which are fixed by having t given at a fixed point in our feld, say $t = 0$ at $x=0, y=0, z=0$. Nov. 2 (3), (6).

x, y, z alone are functions $f(t)$.

Dif. gleichungen lehrt uns das

$$x = x(t, c_1 c_2 c_3)$$
$$y = y(t \ c_1 \ c_2 \ c_3)$$
$$z = z(t \ c_1 \ c_2 \ c_3)$$

= 3 parametric Schar.

These constants are fixed by fixing our ort functions at time $t = 0$ say.

For instance

$$0 = x(0, c_1, c_2 c_3)$$

$$0 = y(0, c_1, c_2 c_3)$$

$$0 = z(0\ c_1\ c_2\ c_3).$$

Hare and Hound Problem. Curve of Pursuit.

Aufgabe.

y

Hund

1

x

O

Hare

Hund mit geschwindigkeit b = const

Hare " " a = "

$x = at$

Richtung des Hunds ist bestimmt in each moment

$$W = \left(\frac{b(at-x)}{\sqrt{(at-x)^2+y^2}} , \frac{-by}{\sqrt{(at-x)^2+y^2}} \right)$$

When does the dog catch the hare!

$$T = \frac{b}{b^2-a^2} = \text{time if } b > a$$

Suppose the Beschleunigungs vector is given. Fundamental aufgabe. — Given an acceleration feld

Kraft ist ein Vector. = K — Kraft.

$$K = (K_x, K_y, K_z) \text{ or } (X, Y, Z)$$

Denken Kraft feld als vector feld.

Masse ist eine Zahl fixed to a pt — Masse

(m, x, y, z) = massenpunkt. und bewegt sich on account of Kraft K. when

$$m \mathfrak{b} = K$$

or we say Kraft works on (m, x, y, z)

$$m(x'', y'', z'') = (X, Y, Z) \quad \text{or}$$

$$\left.\begin{array}{l} m x'' = X(x, y, z, t) \\ m y'' = Y(x y z t) \\ m z'' = Z(x y z t) \end{array}\right\} = \text{dif. gl.}$$

If X Y Z are given we have 3 complicated dif. gl to solve.

If
$$\left.\begin{aligned} mx'' &= 0 \\ my'' &= 0 \\ mz'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= at + a' \\ y &= bt + b' \\ z &= ct + c' \end{aligned}$$

Newtons 1st and 2nd law.

1st Newton law.

2nd " ".

What is the form of the allgemeine Lösung of
$$mx'' = X$$
$$my'' =$$
$$mz'' =$$

This system is same as

$$\left.\begin{aligned} mu' &= X & x' &= u \\ mv' &= Y & y' &= v \\ mw' &= Z & z' &= w \end{aligned}\right\} \quad \text{6 equations, 6 unknowns.}$$

more equations but all of 1 order

Dif. gl. lehrt dass

$$x = x(t, c, c_2\, c_3\, c_4\, c_5 - c_6)$$
$$y = y(t, \qquad)$$
$$z = z(t, \qquad)$$
$$u = u(t, \qquad)$$
$$v = v(t, \qquad)$$
$$w = w(t, \qquad)$$

So general solution has 6 constants or 6 paramet. Schar von Bewegung. Anfangsbedingung gegeben muss um ein curve bestimmen zu lassen.

Etwa

$$0 = x(0, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6)$$
$$0 = y(0, \quad)$$
$$0 = z(0, \quad)$$
$$0 = u(0, \quad)$$
$$0 = v(0 - \quad - \quad)$$
$$0 = w(0 - \quad - \quad)$$

Wir können c als fct (x y z u v w t) ausdrucken.

$$c_1 = f_1(x y z u v w t)$$
$$c_2 = f_2(\quad)$$
ect.

and these are same as the other set.

Man nennt diese Gleichungen die <u>Integral</u> Bewegungsgleichung.

If we have all of the 6 equations for c, ect we know the motion.

If we know but one of the equations
say $c_1 = f_1$
then we do not know the motion but
we do know that we have a function
which for all values of t is a constant,
or is independent of t.
Also f_1^2 $f_1 + e^{f_1}$ ect. are not fctions of t.
If we know $c_1 = f_1$ and $c_2 = f_2$ ect say
we know two fcts as above. but there
must be no relation between them
say $$F(f_1, f_2, f_3) = 0$$
iden. x y z u v w t erfüllt.
When this is not filled we have 3 independent gleichung
In the following paragraphs the following handelte
1) Kraft hängt nur von Ort ab, (nicht t)
2) Kraft " auch von Geschwindigkeit ab.
3) " " " " Zeit.

Paragraph. IV

Kraft hängt nur vom Orte ab

Freier Fall, Wurf, Schwingung, Planeten Bewegung.

$t=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

$x'=0,\ y'=0\ \ z'=0$

Kraft = Schwere

$= 0, 0, g$

$m(x'', y'', z'') = K$

Let $m = 1$

$x''=0 \quad x' = \text{const},\ \therefore x=0$

$y''=0 \quad y' = \ '' \quad y=0$

$z''=g \quad z' = gt+c \quad z'=gt$

Und wir haben

$x=0$

$y=0$

$z=\frac{g}{2}t^2$

Take case of thrown ball

Thrown body.

Here take ($x=0,\ y=0,\ z=0$

$x'=c\cdot\cos\alpha,\ \ y'=0\ \ z'=-c\sin\alpha$

Our dif. gl. are same but anfangs-bedingungen are different.

we get

$$x = at + a'$$
$$y = bt + b'$$
$$z = \frac{g}{2}t^2 + ct + c'$$

Using beginning conditions

$$x = v\cos\alpha \cdot t$$
$$y = 0$$
$$z = \frac{g}{2}t^2 - v\sin\alpha \cdot t$$

Eliminate t and get the path

$$Z = Ax^2 - Bx$$

where $A = \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}$, $B = \tan\alpha$.

and is a parabola. As to how it lies write it in form

$$z = A\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A}$$
$$\zeta = \frac{B^2}{4A} + z$$
$$\xi = x - \frac{B}{2A}$$
$$\zeta = A\xi^2$$

Our parabola will be as in the figure

H = highest point $= \frac{B^2}{4A} = \frac{\sin^2\alpha}{2g} v^2$

To throw highest $\alpha = 90°$

To " farthest $W = \frac{B}{A} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{g} v^2$

$= \frac{\sin 2\alpha}{g} v^2$ and $\alpha = 45°$.

For given α we have in order to get the distance to solve

$$\sin 2\alpha = \frac{gW}{v^2} < 1$$

Nov. 6
(7), (8)

Wir haben nun zu grunde gelegt.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

At each point of space we have a vector $(X, Y, Z) = K$ which gives us a Kraftfeld.

Schwingung due to effect of elastische Kraft.

Grösse = proportional Abstand. We will take it equal to the distance from origin.

Each vector fastened to $(x\,y\,z)$ is represented by the distance to origin.

Then elastische Kraft = central Kraft.

$$X = -k^2 x$$
$$Y = -k^2 y$$
$$Z = -k^2 z$$

k = elastisische constant.

so $x'' = -k^2 x$, $y'' = -k^2 y$, $z'' = -k^2 z$

Assume our motion takes place in the x axis. Then we have

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$$

$x = \sin kt$, $x' = k \cos kt$ = par. lösung

$x = \cos kt$ $\quad x' = -k \sin kt$.

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt.$$

assume that for $x = a$, no velocity

then $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=a} = 0$ and $c_1 = 0$

and we get a complete equation of motion

$$x = a \cos kt.$$

$T = \frac{2\pi}{k}$ = Schwingungs Dauer.

In space we get

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt$$

$$y = c_3$$

$$z = c_5$$

with 6 constants.

we must these so determine according to beginning conditions say.

for $t=0$; $z=0$, $z'=0$

$x=1$, $x'=0$

$y=0$, $y'=1$

And we get c_5, c_6 $c_1 c_4 = 0$, $c_3, c_2 = 1$.

$Z(t) = 0$ identically

and our point remains in a plane.

$x = \cos kt$

$y = \frac{\sin kt}{k}$

Eliminate t and get "bahnkurve"

$x^2 + k^2 y^2 = 1$ = ellipse in

xy ebene.

Now come now to the most important case. Newtonsche Krafte feld.

Newton's Kraft felde.

Grösse der Kraft $= \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$

and richtung is on line between the two bodies.

Let $m_1 = 1$, $m_2 = 1$

Think of one as fixed

z • m_1 y x m_2

$$K = \left(-\frac{x}{\rho^3}, -\frac{y}{\rho^3}, -\frac{z}{\rho^3}\right) \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$X = -\frac{x}{\rho^3} \qquad -x'' = -\frac{x}{\rho^3}$$

$$Y = -\frac{y}{\rho^3} \qquad y'' = \frac{y}{\rho^3}$$

$$Z = -\frac{z}{\rho^3} \qquad z'' = \frac{z}{\rho^3}$$

This is also an astronomical problem.
gives planetary motion.

To solve the 3 equations.
multiply 1, by $-y$, 2, by x, ect
and get
$$x''y - y''x = 0 \quad = \frac{d}{dt}(x'y - xy') = 0$$
$$x''z - z''x = 0 \quad = \frac{d}{dt}(\qquad) = 0$$
$$y''z - z''y = 0 \quad = \frac{d}{dt}(\qquad) = 0$$
and we get
$$x'y - xy' = c_1$$
$$x'z - xz' = c_2$$
$$y'z - yz' = c_3$$
so we have 3 integrals of the equations found.

for $t = 0$ let $z = 0$, $z' = 0$
which is no restriction and gives
$$c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

If $z=0$, $z'=0$

$x'y - xy' = 0$ is the determinant

Suppose $z \neq 0$, then we can $\div$ by z

$$\frac{x'z - xz'}{z^2} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d\left(\frac{x}{z}\right)}{dt} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{z} = \text{const}, \quad x &= C_1 z \\ \text{and in same way } y &= C_2 z \end{aligned}\right\} = \text{line}.$$

make this line the x axis.

and our equations reduce to

$$x'' = -\frac{1}{x^2}$$

and. $x'x'' = -\frac{x'}{x^2}$

or $\frac{1}{2}x'^2 = +\frac{1}{x} + \frac{C}{2}$

$$x'^2 = \frac{2}{x} + C$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x} + C}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{x} + C}} \qquad \text{and } x = f(t)$$

and we get a schwingende Bewegung um null punkt.

So we can say our motion is in $z = 0$.

$$x'' = -\frac{x}{\rho^3} \quad \text{where } \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y'' = -\frac{y}{\rho^3}$$

Mul. 1 mit x', 2 mit y'.

and get

$$x'x'' + y'y'' = -\frac{1}{\rho^3}(xx' + yy')$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = -\frac{1}{\rho^3}\frac{1}{2}\frac{d\rho^2}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{1}{\rho}\right)'$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{1}{\rho} - C'$$

which with $xy' - yx' = c$, gives us 2 equations.

Now in xy plane let $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

ordinary polar coordinates

$$x' = \rho'\cos\varphi \mp \rho\sin\varphi\cdot\varphi' \quad \Big| \; -y$$
$$y' = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\varphi' \quad \Big| \; x$$

and $xy' - yx' = c$ becomes

$$\rho^2\varphi' = c$$

and the other equation is

$$\frac{1}{2}(\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2) = \frac{1}{\rho} - C'$$

From these two equations we get

$$\frac{1}{2}\left(\rho'^2 + \frac{c^2}{\rho^2}\right) = \frac{1}{\rho} - c'$$

$$\rho'^2 = -\frac{c^2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - 2c'$$

$$\rho^2 = \sqrt{-\frac{c^2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - 2c'}$$

$$t = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{-\frac{c^2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - 2c'}} + c''$$

We can fix things so that $c'' = 0$.

But $$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{c}{\rho\sqrt{-c^2 + 2\rho - 2c'\rho^2}}$$

$$\varphi = \int \frac{c}{\rho\sqrt{-c^2 + 2\rho - 2c'\rho^2}} + c'''$$

To integrate let $\frac{c^2}{\rho} - 1 = \sigma$, $\rho = \frac{c^2}{\sigma + 1}$

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = -\frac{c^2}{\rho^2}$$

~~$-2c'\rho^2 + 2\rho$~~

$$\varphi = -\int \frac{d\sigma}{\sqrt{-2c'c^2 + \frac{2c^2}{\rho} - \frac{c^4}{\rho^2}}}$$

$$= \int \frac{d\sigma}{\sqrt{-2c'c^2 + 2(\sigma+1) - (1+\sigma)^2}} + c''$$

$$= -\int \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2+e^2}} + c''' \qquad e = \sqrt{1-2c'c^2}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sigma}{e} + c'''$$

We can make $c''' = 0$

$$\frac{\sigma}{e} = \cos\varphi = \frac{1}{e}\left(\frac{c^2}{\rho} - 1\right)$$

$$\frac{c^2}{\rho} - 1 = e\cos\varphi \,, \quad \rho = \frac{c^2}{1+e\cos\varphi}$$

and we get $\rho = fct.(\varphi)$

Nov. 9
(9). (10)

In the center of the Kraftfeld we have a point of discontinuity.

Was ist unser Curve $\rho = \dfrac{c^2}{1+e\cos\varphi}$

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

$$\rho = ex = c^2$$

$$\rho = c^2 - ex$$

$$\underline{x^2+y^2 = e^2x^2 - 2c^2ex + c^4}$$

= Kegelschnitt. and we get the first Kepler law

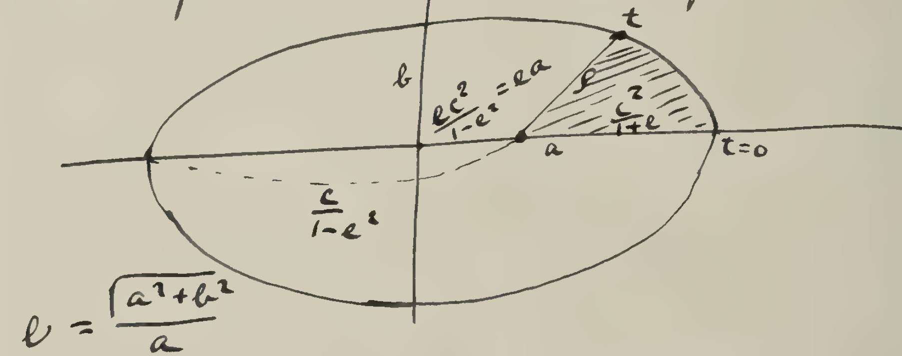
Kepler's 1st Law.

If we let $x = \xi + \frac{e c^2}{e^2-1}$

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = \frac{c^2}{1-e^2}, \quad b = \frac{c^2}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1-e^2, \quad c = \frac{b}{\sqrt{a}}$$

Brennpunkt is the center of the Kraft.



$$e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Calculate the area swept out by ρ as it moves from its position in the x axis to a position t

$$A_{0t} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \rho^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{c}{\frac{d\varphi}{dt}} d\varphi = \frac{1}{2} c t$$

Kepler's 2nd Law.

and the area is proportional to the time or the 2nd Kepler law.

$$\pi ab = \frac{1}{2} c T$$
$$= \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a}} T. \quad T = 2\pi a^{\frac{3}{2}}$$

T = Umlauf Zeit and does not depend on the minor axis. Keplers 3rd law, — Kepler's 3rd Law.

Some remarks about the above case and will mention some theorems about central forces.

Satz von Bertrand - ~~Wenn der Kraft nur nur~~. Hängt die Intensität einer Centralkraft nur von der Entfernung ρ des Angriffspunktes vom Centrum ab, und beschreibt jeder Massenpunkt in dem Felde dieser Kraft bei nicht zu grosser Anfangsgeschwindigkeit eine geschlossene Bahn, so ist die Intensität entweder dem Radiusvektor ρ direkt, oder seinem Quadrat umgekehrt proportional — Bertrands Law

$$|R| = C \cdot \rho \quad \text{oder} \quad |R| = \frac{C}{\rho^2}$$

Dieser Satz zeigt also, dass das elastische Feld und das Newtonsche, unsere beiden Beispiele, die einzigen Felder der beschriebenen Art sind, die zu geschlossenen Bahnkurven Anlass geben.

Law of Darboux and Halphen.

Satz von Darboux & Halphen. Bewegt sich in irgend einem nur vom Orte abhängigen Kraftfelde $K(xyz)$ jeder Massenpunkt bei beliebige Anfangsgeschwindigkeit auf einem Kegelschnitte, so ist K eine Centralkraft, deren Intensitat in einem im Centrum beginnenden Koordinatensysteme (in der Ebene) nur folgenden beiden Gesetzen folgen kann

$$|K| = \frac{C \cdot \rho}{(ax+by+c)^3} \quad \text{oder} \quad |K| = \frac{C \cdot \rho}{(ax^2+bxy+cy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dabei sind a, b, c, C willkürliche Constante, und $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Fordern wir noch weiter, dass K nur von der Entfernung ρ abhängt, so folgt $a = b = 0$ bezw. $a = c$, $b = 0$ und wir erhalten wieder das elastische ($|K| = C.\rho$) oder das Newtonsche Feld ($K = \frac{C}{\rho^2}$), wie beim vorigen Satze.

Many other interesting theorems among which is the following

Beispiel which is very interesting and found in Rausenberger seite 216 and concerns the motion of a point due to the attraction of two masses m_1 and m_2. see also Jacobi, Dynamik S. 221.

$\bullet\, m_1 \qquad \overset{\bullet}{m} \qquad \bullet\, m_2$

Paragraph V

Kraftfelde 2te Art. (Kraft depends on velocity). Due mostly to "Widerstand".

Grösse der Widerstand Kraft.

1st nehmen wir an es ist proportional to square of velocity.

Paragraph V.

Fall und Schwingung im widerstehenden Medium; gedämpfte Bewegung; Webers elektrisches Grundgesetz

$$W = \text{vector} = (-\kappa V x', -\kappa V y', \kappa V z')$$

where $V = |w| = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

$$w = \left(\frac{x'}{V}, \frac{y'}{V}, \frac{z'}{V}\right) = \text{geschwindigkeitsvector}$$

$$m x'' = X - \kappa V x'$$

$$m y'' = Y - \kappa V y'$$

$$m z'' = Z - \kappa V z'$$

$$m x'' = X - \kappa \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} \cdot x'$$

$$m y'' = Y - \kappa \sqrt{} \cdot y'$$

$$m z'' = Z - \kappa \sqrt{} \cdot z'$$

More complicated field than the former for here we must know the velocity as well as position at each point

Einfach Beispiel, where X, Y, Z is the Schwerkraft.

$$X, = 0 \quad Y = 0 \quad Z = \cdot g$$

$$x'' = -\kappa\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\cdot x'$$

$$y'' = -\kappa\sqrt{\quad}\cdot y'$$

$$z'' = g - \kappa\sqrt{\quad}\cdot z'$$

for $t = 0$
$x' = 0, \; y' = 0$
$x = 0 \quad y = 0$

Our only equation then is

$$z'' = g - \kappa z'^2 ,$$

Let $\kappa = \frac{g}{\kappa'^2}$

$$z'' = g\left(1 - \frac{z'^2}{\kappa'^2}\right)$$

Let $z' = \quad = V(t)$

$$V' = g\left(1 - \frac{V^2}{\kappa'^2}\right)$$

Let $g = 1$ for time being

$$\frac{dt}{dV} = \frac{\kappa'^2}{\kappa'^2 - V^2} , \quad \frac{2}{\kappa'}\frac{dt}{dV} = \frac{2\kappa'}{\kappa'^2 - V^2}$$

$$= \frac{1}{K'-V} + \frac{1}{K'+V}$$

$$\frac{2t}{K'} = l\,\frac{K'+V}{K'-V}$$

$$\frac{K'+V}{K'-V} = e^{\frac{2t}{K'}}, \quad V = K'\,\frac{e^{\frac{t}{K'}} - e^{-\frac{t}{K'}}}{e^{\frac{t}{K'}} + e^{-\frac{t}{K'}}} = \frac{dz}{dt}$$

$$\underline{z = K'^2\, l\, \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{K'}} + e^{-\frac{t}{K'}}\right)}$$

$$z' = \frac{dz}{dV}V', \quad V' = \frac{dV}{dz}z'$$

$$\frac{dz}{dV} = \frac{1}{K'^2}\,\frac{K'^2-V^2}{V}, \quad \underline{z = \frac{K'^2}{2}\, l\, \frac{K'^2}{K'^2-V^2}}$$

= relation between z and V.

$$x'' = -\kappa V x'$$

$$z'' = g - \kappa V z' \qquad V = \sqrt{x'^2 + z'^2}$$

To solve these equations.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = V$$

$$\frac{z'}{x'} \equiv -p, \qquad z' = -px', \quad z'' = -px'' - x'p'$$

$$= g + \kappa V p x'$$

$$x' p' + g = 0$$

$$x'' = -\kappa s' x' \,, \quad l x' = -\kappa s + c$$

$$x' = C e^{-\kappa s} = \text{Richtung}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p'}{x'} = p' C e^{\kappa s}$$

$$\frac{x'}{s'} = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{g}{\sqrt{1+p^2}} C^{-2} e^{2\kappa s}$$

$$C - p\sqrt{1+p^2} - l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \kappa C^{-2} e^{2\kappa s}$$

from $x' = C e^{-\kappa s}$ for $s = \infty$ we get $x' = 0$

and our curve has an asymptote $\perp$ to x axis.

Nov. 16
(11), (12)

Nun nehmen wir

$$W = (-\kappa x', -\kappa y', -\kappa z')$$

$$|W| = \kappa\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = V$$

$$mx'' = -\kappa x' + X$$
$$my'' = -\kappa y' + Y$$
$$mz'' = -\kappa z' + Z$$

Assume
$$\begin{cases} X = -k^2 x \\ Y = -k^2 y \\ Z = -k^2 z \end{cases}$$

$$mx'' + \kappa x' + k^2 x = 0$$
$$my'' + \kappa y' + k^2 y = 0$$
$$mz'' + \kappa z' + k^2 z = 0$$

Let $m = 1$ from now on

Think of the motion in a line then we use only one equation

$$x'' + \kappa x' + kx^2 = 0$$

$x = 0$

$x(t) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ = solution

The substitution $x = e^{\lambda t}$ gives us a particular solution. Differentiating twice and substituting

$$\lambda^2 + \kappa\lambda + k^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{\kappa}{2} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - k^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\kappa}{2} - \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - k^2}$$

1.) $\frac{K}{2} \gtrless k$ {Widerstandskraft > elastische Kraft} {Die Dämpfung überwiegt die Bewegungskraft.}

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\underset{t=\infty}{L}\ x(t) = 0$. After infinite time our point is at origin or center of elastic force.

Differentiating

$$c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Let this be 0 to find when the velocity is 0. $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -\frac{c_2 \lambda_2}{c_1 \lambda_1}$

and we find that we have one point of velocity 0 or no point.

2) $\frac{K}{2} < k$ {Elastische Kraft überwiegt die Dämpfung}

Here λ_1 and λ_2 are conjugate imaginary quantities. By use of two new Integrationconstants we get for our integral

$$x(t) = c e^{-\frac{K}{2}t} \sin(nt + \gamma), \quad n = \left|\sqrt{k^2 - \frac{K^2}{4}}\right|$$

Let $x' = 0$ and after reduction we get $\frac{2n}{K} = \tan nt$

$$t = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{2n}{K} = \frac{1}{\left|\sqrt{k^2 - \frac{K}{4}}\right|} \operatorname{arctg} \left|\sqrt{\left(\frac{2k}{K}\right)^2 - 1}\right|$$

T = Schwingungsdauer $= \frac{2\pi}{n}$

For $t = \infty$, $e^{-\frac{K}{2}t} = 0$, and amplitude of swing $\doteq 0$ as $t \doteq \infty$

If $x = 0$ when $t = 0$ then the first "umkehrung" occurs at a time $\tau < \frac{\pi}{2n}$. At time when the point first returns to $x = 0$. the $t = \frac{\pi}{n}$ $\quad \frac{\pi}{n} - \tau > \tau$.
Since $T = \frac{2\pi}{n}$ our motion for one full swing is not divided symmetrically at $x = 0$.

Beispiel. Webersgesetz. Webers-gesetz.

e_1 ρ e_2

$e_1 > 0$ $\quad \rho$ = abstand
$e_2 > 0$ $\quad \frac{e_1 e_2}{\rho_2}(1 - K^2\rho'^2 + 2K^2\rho\rho'') = |K|$

or, Die Kraft zwischen 2 elektrischen Teilchen e_1, e_2 in der Richtung ihrer Verbindungslinie abstossend oder anziehend wirkt, und ihre Intensität ist direkt proportional ihren Massen, umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ρ; dazu tritt aber als wesentlich neuer Bestandteil noch ein factor, $(1 - K^2\rho'^2 + 2K^2\rho\rho'')$, wo K = const.
If ρ = const. we get Coulomb's law of Electrostatics
Das Amperesche Gesetz der Electrodynamic kann man durch eine Integration erhalten.

Take $e_1 = 1 = e_2$ and e_1 im Nullpunkt fest.
Notice that accelleration ρ'' comes in to our formula.

Let $P = 1 - K^2\rho'^2 + 2K^2\rho\rho''$

$$K = \left(\frac{x}{\rho^3}P,\ \frac{y}{\rho^3}P,\ \frac{z}{\rho^3}P\right) = \text{Kraftvector}$$

$$m x'' = \frac{x}{\rho^3} P$$

$$m y'' = \frac{y}{\rho^3} P \qquad \rho = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$m z'' = \frac{z}{\rho^3} P$$

Very little work has been done towards integrating these

Can e_2 so move that $K = 0$, at all time

Solve $P = 0$ for ρ and get

$\rho = at^2 + bt + c$ is an integral

if $b^2 - 4ac = \frac{1}{K^2}$

K is then "umgekehrt licht geschwindigkeit"

A motion of the kind required can only occur then when $a = 0$ or $\rho = \frac{1}{K}t + c$.

Damit haben wir eine Deutung der K als recip. Geschwind. der Beweg. eines elek. Teilchens, bei der die Kraft K zu jeder Zeit $= 0$

Experiment says that $\frac{1}{K\sqrt{2}}$ = velocity of light. This is historically the first place where light and electricity touched.

Eisenbahn Beispiel. Wie muss man die Dampfkraft D of a locomotive einrichten, um entgegen der von der Geschwind. V abhängigen Widerstand W(v) den Zug auf der konstanten Geschw. $\varnothing^c$ zu halten

$$m x'' = D + W(v).$$

Since $x' = c$ we have $D = -W(c)$
d.h. Die Dampfkraft muss entgegengesetzt gleich dem Widerstand bei der gewünschten Geschw. sein.

Paragraph VI.

Paragraph. VI. Erzwungene Schwingung. Das Dreikörperproblem von Darwin. Lawinensturz

Here X, Y, Z depend upon t, or t comes explicitly into our equations.

Idea of „beweglichen Kraftfeld.

Beispiel – Erzwungene elastische Schwingung.

$$X = -k^2 x - \kappa x' + f(t)$$

and our equations are if we let $m = 1$

$$x'' + \kappa x' + k^2 x = f(t)$$

Suppose we know one solution $x = \varphi(t)$

then the general solution is

$x(t) = \varphi(t) + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ where $\lambda^2 + \kappa\lambda + k^2 = 0 \Big\} \begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix} = \text{roots}$

Now take $f(t)$ as given and $= A \cos Nt$. ($N = \text{const}$)

We have $x'' + \kappa x' + k^2 x = A \cos Nt$

~~[illegible]~~ $c \cdot \cos(Nt - \psi) = x$
will satisfy the equation if

If $\kappa = 0$ and $N = k$ we cannot get a finite C. And as N approaches k we get a correspondingly great C.

$$C = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - N^2)^2 + N^2\kappa^2}} \qquad \tan\psi = \frac{N\kappa}{k^2 - N^2}$$

$T = \frac{2\pi}{N}$. = same period as for $f(t) = 0$

but C is direkt proportional to amplitude

Special Problem of 3 bodies

A. Special case of
Drei Körper Problem.

{ See Acta Math. 21. S. (99-244)

Jupiter, Sonne, Mond.

Jupiter moves in ⊙ about fixed sun with constant velocity. P moves due to attraction of Sun and Jupiter.

M = mass Sun
m = " Jup.

$x = \sin 2\pi t$
$y = \cos 2\pi t$
} so bewegt Jupiter about Sonne.

Let $P = \sqrt{x^2 + y^2}$ = distance from Sun.

$\frac{M}{P^2}$ and $\frac{m}{\rho^2}$ in directions PS and PJ respectively give us

$\to x'' = -M\frac{x}{P^3}, \; y'' = -M\frac{y}{P^3}$ M = mass of Sun.

$\rho = \sqrt{(x - \sin 2\pi t)^2 + (y - 2\cos 2\pi t)^2}$ = dis. P. from Jup.

$\to x'' = \frac{\sin 2\pi t - x}{\rho^3} m + ~~\frac{M\,x}{P^3}~~ +$

$y'' = \frac{\cos 2\pi t - y}{\rho^3} m$

so our Kraftfeld is

Nov. 20 (13), (14)

$$x'' = m \cdot \frac{\sin 2\pi t - x}{\rho^3} - M\frac{x}{P^3}$$

$$y' = m\,\frac{\cos 2\pi t - y}{\rho^3} - M\frac{y}{P^3}$$

Darwin integrates these equations. We will go no farther than to say that in our different kinds of motion for P we get motion of moon about Jupiter and then again we get a figure eight motion about Jupiter and sun (•∞•)

General Remarks.

If we write our equations of motion for this paragraph in the form

$$m x'' = -\kappa x' - k^2\left(x - \frac{f(t)}{k^2}\right)$$

Then in place of the elastic force $-k^2x$ we have an elastic force of intensity k^2 whose center is no longer at the origin but at $x = \frac{f(t)}{k^2}$. We have then an elastic motion whose center has a motion through $x = \frac{f(t)}{k^2}$. If $f(t) = A\cos Nt$ then we get a simple swing through the point.

We found $T = \frac{2\pi}{N}$.

The Amplitude was $c = \frac{a}{\sqrt{(k^2-N^2)^2+\kappa N^2}}$

C increases without limit when $K = 0$ and $k = N$. There is no periodic motion

Wird nun die Dämpfung sehr klein und stimmt gleichzeitig die Periode der erzwingende Schwingung mit der der freien Schwingung des seiner inneren elastischen Kraft K^2 allein überlassenen Systemes überein, so wächst die Amplitude der erzwungen' Schwingung ins unendliche. Auf diesen Fall wollte ich noch besonders hinweisen, als auf den in der Theorie und der Praxis so sehr wichtigen Fall, in dem eine Schwingung oder allgemeiner ein periodischer Vorgang geringer Intensität einem Systeme eine beliebig grosse Schwingung aufzwingen kann, die bis zur Zerstörung des Systemes geht; es ist dazu in der Hauptsache nur nötig, dass seine Periode mit der Periode der Eigenschwingung des unbeeinflussten Systems rather wrong übereinstimmt. This is why soldiers shall not walk keeping step across a bridge. Many other examples in practice might begruen.

Now take a case where m changes — *Lawinensturz*

Say $\frac{dm}{dt} = m$, $m = e^t$ at time t.

$$m z'' = g \quad \text{for free fall}$$

oder $z'' = g e^{-t}$ = equation of motion

$$z' = -g(e^{-t} - 1)$$

$$z = g(e^{-t} + t - 1)$$

Paragraph. VII.

Paragraph VII. Bedingte Bewegung eines Massenpunktes

1). Eine Relation zwischen unser coordinaten x, y, z, or our point moves on a surface. $f(xyz) = 0$ and $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ for all values of t.
If we have t explicit in f, say $f(xyzt) = 0$ then our surface moves in space.

2) Zwei Relationen gegeben.

$$f(xyz) = 0, \quad g(xyz) = 0.$$

May have t explicit then our ~~curve~~ curve moves

3). Equations with derivatives given.

$$f\,(x'y'z',\ x\,y\,z\,t) = 0$$

1) and 2) are holonom. Bedingungen.

3.) = Nichtholonom.

Differentiating 1 we get

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,x' + \cdots$$

which is apparently case 3.) but this dif. equation may be integrated directly and motion really doesn't depend on x', y', z'

Gaussische Princip.

Newtons law doesn't help in the question of conditioned motion. Gauss went at the problem thus.

$$m\,x'' - X = 0$$

$$m\,y'' - Y = 0$$

$$m\,z'' - Z = 0.$$

are Newtons equations of motion. Gauss said

$$Z = \frac{1}{m}\left\{(m\,x'' - X)^2 + (m\,y'' - Y)^2 + (m\,z'' - Z)^2\right\} = \text{min.}$$

Gauss Princip. der kleinste Zwang. or Jede Punkt bewegt sich so, dass

in jedem Moment der Zwang verglichen mit allen mit den Bedingungen verträglichen Bewegungen derselben Geschwindigkeit durch denselben Ort ein Min. ist.

$x\,y\,z\;x'y'z'$ are supposed known at time t then the accelleration must according to Gauss fullfil the equation.

From case 1) $f(x\,y\,z)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0$$

$$\Phi \equiv \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' + \left(\frac{\partial f}{\partial x}x'^2 + \cdots\right) = 0$$

Z to be made a minimum while $\Phi = 0$

$$\frac{\partial(Z \mp \lambda\Phi)}{\partial x''} = 0, \qquad \frac{\partial(Z \mp \lambda\Phi)}{\partial y''} = 0$$

$$\frac{\partial(Z \mp \lambda\Phi)}{\partial z''} = 0$$

or
$$mx'' - X \mp \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
$$my'' - Y - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$mz'' - Z - \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Out of these at time t we must reckon x'', y'', z''. λ is constant.

With $\Phi = 0$ we have 4 equations with 4 unknowns x'', y'', z'', λ.

Our equations are of form

m · accelleration = Kraft + R

where $R = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ = reactions Kraft vector.

R is $\perp$ to surface directed.

If our surface contains t explicitly say $f(x\,y\,z, t) = 0$ we have nothing new for Gausses principle is for some point of time.

2). $f(x\,y\,z\,t) = 0$, $g(x\,y\,z\,t) = 0$

$$Z = \frac{1}{m}\left\{(mx'' - X)^2 + \cdots\right.$$

Here we have two conditions

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \cdots\cdots = 0$$

$$\Psi = \frac{\partial g}{\partial x}x'' + \cdots = 0$$

Z is to be made a minimum while $\Phi = 0$ and $\Psi = 0$.

$$\frac{\partial(Z - \lambda\Phi - \mu\Psi)}{\partial x''} = 0 \text{ ect.}$$

or $$m x'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$m y'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$m z'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z}$$

and with $\Phi = 0$ $\Psi = 0$ we have five equations and five unknowns.

Our 3 equations are of form

m . accelleration = Kraft + R

now $R = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$

or again reaction vector. ⊥ to curve.

3). $f(x', y', z', x\, y\, z, t) = 0$

$$\Phi \equiv \frac{\partial f}{\partial x'} x'' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial z'} z'' + \cdots \qquad = 0$$

If we have another condition

$$g(x', y', z', x\, y\, z, t) = 0$$

we simply have to construct another equation

$$\Psi \equiv \frac{\partial g}{\partial x'} x'' + \frac{\partial g}{\partial y'} y'' + \frac{\partial g}{\partial z'} z'' + \cdots \qquad = 0$$

Nov. 23.
(15), (16)

Einige Bemerkungen. – See Boltzman Principe d. Mechanik (I, Cap. 6)

It may occur that the Lagrangian equations are very hard to get, that discontinuities

or singularities occur in our conditional equations, or that inequalities are used instead of conditional equations. In solchen Fällen erscheint ein Zurückgreifen auf das Gaussche Princip sehr vorteilhaft und man wird oft dadurch die Probleme vollkommen erledigen können. Solche Aufgaben sind z. B. das Gleichgewicht eines Punktes in der Spitze eines Kegels, die Bewegung eines Punktes auf einer Kante, eine Bewegung die über die Spitze eines Berges geht. etc.

Now our general question. Point moves according to

$$mx'' = X$$
$$my'' =$$
$$mz'' =$$

and also with one or more equations of condition

$$f(x\,y\,z\,t) = 0$$
$$g(\quad) = 0$$

and z. B.

$$mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$my'' =$$
$$mz'' =$$

These are the ~~Legendr~~ <u>Lagrangian equations of motion.</u>

λ giebt Intensität der Kraft.

Newton case is a special one in this where $\lambda, \mu = 0$

Boltzman discusses these in his book without using the Gauss principle.

Now let us take $X, Y, Z = 0$ as <u>Hertz</u> has done.

We have

$$m x'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$m y'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$m z'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

Mul. by. x', y', z' resp. and add and get

$$m(x'x'' + y'y'' + z'z'') = \lambda\left(x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

and assuming t does not occur explicitly in f. we get

$$m(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0$$

If our equation is $f(x'y'z'xyz) = 0$

we have

$$m(x'x''+yy+zz) = 0+\lambda\left(x'\frac{\partial f}{\partial x'}+y'\frac{\partial f}{\partial y'}+z'\frac{\partial f}{\partial z'}\right)$$

$$=\lambda n f$$

If $f(x'y'z'xyzt)=0$ is homogeneous in $x'y'z'$ of degree n, this is 0.

But we will limit ourselves to

$$\underline{m(x'x''+y'y''+z'z'')=0}$$

Integrating we get

$$x'^2+y'^2+z'^2=V^2$$

and under these allgemeine Voraussetzungen <u>velocity is constant</u>.

Wir wollen Bogenlänge einführen

$t=0$
$s=0$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)^2=V^2$$

$$\frac{ds}{dt}=V$$

$$\underline{s=Vt}$$

Nun bezeichnen wir Reactions Kraft oder Vector $(mx'', my'', mz'') =$

$$\left(mV^2\frac{d^2x}{ds^2}, mV^2\frac{d^2y}{ds^2}, mV^2\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

Betrag der Reactions Kraft ist

$$mV^2\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds}\right)^2} = \underline{mV^2K}$$

for when we have x y z as fct. of s the $\sqrt{\ }$ of the sum of squares of second derivatives is Krümmung K. So as point moves about a curve the Reactions Kraft is greater as the velocity² and curvature is greater.

Compare with earlier case where we resolved ~~motion~~ acceleration along a curve into tangential and normal components where our normal component was the Betrag der Reactions Kraft found above. Our vector (mx'', my'', mz'') lies in the osculating plane.

Our curves are <u>Geodatic</u> lines.

Hertz'sche Princip

Hertz nennt eine Geradest Bahn auf einer Fläche $f(xyz)=0$ eine solche Curve die in jedem Punkte unter allen Curven der Fläche gleicher Richtung durch ihm die geringste ~~Curven hinsichtlich beliebiger Nebenbedingungen sprechen~~ Krummung besitzt.

Hertz'sche Grund Gesetz. Ein Massenpunkt beharrt (wenn keine Kräfte auf ihn wirken) in seinem Zustande der Ruhe oder gleichformigen Bewegung auf einer geradesten Bahn.

This is the <u>one</u> principle which Hertz uses to build up mechanics.

<u>$s = vt$</u> = first part of principle

$$K^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2$$

wo $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ und $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$

und auf $f(xyz) = 0$ liegt.

2nd part of principle is that

<u>$K = \min.$</u>

Dif. $f(xyz)=0$ nach s two times and get

$$1)\quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z^1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \cdots = 0$$

which second derivatives must satisfy

2). We have $\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0$

3). $\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds}\right)^2=$ Min

So our problem is to find three unknowns which make 3) a min. while 1) and 2) are given as conditions.

So according to Lagrange.

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2+$$
$$\lambda'\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{ds^2}+\cdots\right)$$
$$+\mu'\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}\right)$$

$$2\frac{d^2x}{ds^2}+\lambda'\frac{\partial f}{\partial x}+\mu'\frac{dx}{ds}=0 \quad \Big| \text{ mul. and add } \frac{dx}{ds}$$
$$2\frac{d^2y}{ds^2}+\lambda'\frac{\partial f}{\partial y}+\mu'\frac{dy}{ds}=0 \quad \Big| \ \frac{dy}{ds}$$
$$2\frac{\partial^2 z}{ds^2}+\lambda'\frac{\partial f}{\partial z}+\mu'\frac{dz}{ds}=0 \quad \Big| \ \frac{dz}{ds}$$

and get

$$u' = 0$$

$$\begin{cases} x'' \cdot \dfrac{2}{v^2} + \lambda' \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ y'' \, \dfrac{2}{v^2} + \lambda' \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \qquad z'' \cdot \dfrac{2}{v^2} + \lambda' \dfrac{\partial f}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ y'' &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \\ z'' &= \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{ where } \lambda = -\lambda' \cdot \frac{v^2}{2}$$

These are our equations of motion.

<u>Meuniers Theorem</u>. Legt man durch eine Tangente einer Fläche alle Ebenen, so ist der Krummungsradius jedes Schnittes gleich dem Krümmungsradius des Schnittes der Normalebene (die durch die Flächennormale geht) multipliciert mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen, die Krümmung des Normalschnittes ist also die kleinste.

Nun haben wir aus Gauss. Princip Lag. Gleichung der Bewegung abgeleitet — Nov. 27. (17) (18)

$$m x'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m y'' =$$

$$m z'' =$$

$f(xyzt) = 0$ (Holonom Bedingung)

Given Ort und Geschwindigkeit at a fixed time.

λ comes into the equations but not its derivative. We can eliminate it from our 3 equations and get two dif. eq. 2^d order. For z ~~auf~~ substitute $z = \dot{z}(xyt)$ from $f(xyzt) = 0$.

Ort ist durch 2 Const. bestimmt

Geschwindigkeit .. ..

Altogether 4 constants as should be for 2 dif. eq. 2nd Order.

If another conditional equation $g(xyzt) = 0$ is given we can eliminate λ and μ

and get one dif. eq. 2nd order which uses 2 consts. but here Ort = one const and Geschwindigkeit = one const.

If here we have $f(x'y'z'xyz t) = 0$ given we get after elimination 2 dif. gl. 2nd order and one first order. 5 constants of integration. Ort can be given arbitrarily so uses 3 constants. Velocity given will use up 2 constants. $3+2=5$.

Paragraph VIII. Beispiele

Schiefe Ebene

$x = s\cos\psi$

ψ

x

$s\sin\psi = z$

s

Inn Schwerkraft

z

Think of y axis as $\perp$ to paper and the plane contains y axis.

$$s = \frac{x}{\cos\psi} = \frac{z}{\sin\psi}$$

$$f(xyz) = x\sin\psi - z\cos\psi$$

Our equations are

$$x'' = \lambda \sin\psi \quad \rightarrow s''\cos\psi = \lambda \sin\psi$$

$$z'' = g - \lambda\cos\psi \quad s''\sin\psi = g - \lambda\cos\psi$$

Mul. mit $\cos\psi$ und $\sin\psi$

$$s'' = g\sin\psi$$

$$s = g\sin\psi \cdot \frac{t^2}{2}$$

if at $t=0$, $s=0$, and velocity $= 0$

$$V = g\sin\psi \cdot t.$$

$$V^2 = 2gz$$

$$t^2 = \frac{2s}{g\sin\psi}$$

If we have a circle tangent at origin then a ball will roll down any chord in the same time.

$$\lambda = \frac{z''\cos\psi}{\sin\psi} = g\cos\psi$$

= grösse des Druckes, and is same for all times t.

Now instead of a plane take an

arbitrary surface, but g = only force acting

$$x'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad \Big| \quad x'$$

$$y'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \quad \Big| \quad y'$$

$$z'' = g + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \quad \Big| \quad z'$$

Mult mit x', y', z' and add.

$$\frac{1}{2} \frac{d(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{dt} = g z'$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = g z + c$$

If for $x = 0$ $x' = 0$.

$$\frac{1}{2} v^2 = g z$$

Or end velocity depends only on the height.

Cycloidal Motion

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{z}{2r - z}}$$

Nebenbedingung $f(x z) = 0$

$$x'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad \Big| \quad x'$$

$$z'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + g \quad \Big| \quad z'$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(x'^2 + z'^2)}{dt} = g z'$$

This figure is to be used in connection with text which concerns the cycloidal pendulum.

$\sqrt{x'^2+z'^2} = v \qquad v^2 = 2gz + c$

$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad , \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1$

$= \frac{2r-z}{z} + 1 = \frac{2r}{z}$

$v^2 = \left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gz + c$

$= \left(\frac{ds}{dz}\right) z'^2 = \frac{2r}{z} z'^2$

$$\frac{dt}{dz} = \sqrt{\frac{2r}{z(c-2gz)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z(h-z)}} = \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos . \frac{2z-h}{h}$$

when $t = 0$, $z = h$, $v = 0$

Durch Umkehrung we get z in terms of t

$\cos t \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2z-h}{h}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ = unabhängig from length of swing. or this pendulum is Tautochrone.

Suppose an swinging thread must on a sphere

Here $f(xyz) = x^2+y^2+z^2-l^2=0$.
When $t=0$ let $y=0$, $y'=0$ ~~and same case as same as above~~.
This motion is

<u>Bewegung des gewöhnlichen Pendels</u>

$$x'' = \lambda x$$
$$y'' = \lambda y \qquad x^2+y^2+z^2=r^2$$
$$z'' = g + \lambda z$$

Can drop $y''=\lambda y$ out of the discussion

In Polar coordinates

$$x = r \sin\vartheta$$
$$z = r\cos\vartheta$$

$$x' = r\cos\vartheta . \vartheta'$$
$$z' = -r\sin\vartheta . \vartheta'$$
$$x'^2+z'^2 = r^2\vartheta'^2$$
$$\vartheta'^2 r^2 = 2gz + c$$
$$\vartheta'^2 = \frac{2g}{r}\cos\vartheta + C$$

for $\vartheta = \alpha$, $\vartheta' = 0$

$$\vartheta'^2 = \frac{2g}{r}(\cos\vartheta - \cos\alpha) = \frac{4g}{r}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{1-K^2 \sin^2\eta}} \quad \text{if} \begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} = K \\ \sin\frac{\vartheta}{2} = K \sin\eta \end{cases}$$

$$\frac{1}{4} T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\eta}}$$

Wir können nach K entwickeln.

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2\sin^2\eta}} = 1 + \frac{1}{2}K^2\sin^2\eta + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}K^4\sin^4\eta$$

$$+ \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}K^6\sin^6\eta + \cdots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}\eta \, d\eta = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2m}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2 K^4 + \cdots \right\}$$

If the swing of the pendulum is not confined to a plane but moves anywhere on the sphere we get the case of the <u>spherical pendulum</u>.

Here $f(xyzt) =$

$$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$= r\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Expanding and cutting off after 2nd term

$$z = r - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{r}$$

$$x'' = -\lambda \frac{x}{r}$$

$$y'' = -\frac{\lambda y}{r}$$

$$z'' = g -$$

which gives us same motion as we above discussed as elastische Bewegung and we got motion in an <u>ellipse</u>

<u>Motion on a Surface where Friction comes in.</u>

Reibung ist eine Kraft.

Punkt bewegt auf $f(xyz) = 0$

Reibung depends on <u>Geschwindigkeit</u> und <u>Druck</u>

Oder Reibung $= R(V, P)$

$$R = \text{vector} = (\mu x', \mu y', \mu z')$$

$$= \mu\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$= R\left(\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\ \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\right.$$

Our equations of motion are

$$m x'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu x'$$

$$m y'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu y'$$

$$m z'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu z'$$

and with equation of the surface and R equation we have five equations.

Nehmen wir an dass $R^{*} = \kappa P V$ or that Reibung proportional to pressure and also to velocity.

Here $\mu = \kappa \lambda \sqrt{}$

and we get Kirchoff's equations.

$$m x'' = X + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \kappa x' \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \right)$$

$$m y'' = Y + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \kappa y' \sqrt{} \right)$$

$$m z'' = Z + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \kappa z' \sqrt{} \right)$$

$f(xyz) = 0$ is the equation of surface

Nov. 30.
Thanksgiving.
(19) (20)

Now take the motion on plane

$x = s \cos\psi$

ψ

$z = s \sin\psi$

s

z

$f(xyz) = 0$ is here

$$x \sin\psi - z \cos\psi = 0$$

Our equations then are

$$x'' = \lambda(\sin\psi \mp \kappa x')$$

$$z'' = g + (-\lambda\cos\psi - \lambda\kappa z')$$

To integrate, change to variable s

$$s = \frac{x}{\cos\psi} = \frac{z}{\sin\psi}$$

$$s''\cos\psi = \lambda\sin\psi - \kappa\lambda s'\cos\psi$$

$$s''\sin\psi = g - \lambda\cos\psi - \kappa\lambda s'\sin\psi$$

Eliminate λ

$$\begin{vmatrix} s''\cos\psi\,, & \sin\psi - \kappa\cos\psi\cdot s' \\ -s''\sin\psi - g\,, & +\cos\psi + \kappa\sin\psi\, s' \end{vmatrix} = 0$$

which is an equation for s, or

$$s'' + g\kappa\cos\psi\, s' = g\sin\psi$$

which has the form

$$s'' + As' = B \quad \text{where } A, B \text{ are constants}$$

$$s = \frac{\sin\psi}{\kappa\cos\psi}t - \frac{\sin\psi}{\kappa^2\cos^2\psi\, g}\left(1 - e^{-g\kappa\cos\psi\cdot t}\right)$$

This should reduce to our former formula when $\kappa = 0$ (or when no friction occurs)

When t is very great the term in ( )

practically vanishes and

$$s' = \frac{\sin\psi}{k\cos\psi} = \text{const}.$$

or velocity is constant.

We may assume the friction only proportional to pressure.

Now take a problem in which $f(xyzt) = 0$ and in which t occurs explicitly.

Take case of inclined plane which rotates. (no friction)

Let ψ change so that $\psi = at$

$f(xyzt) = 0$ is

$$x\sin(at) - z\cos(at) = 0$$

$$x'' = \lambda \sin at$$

$$z'' = g - \lambda \cos at$$

change to variable s, $\quad s = \frac{x}{\cos\psi} = \frac{z}{\sin\psi}$

$s = x\cos at + z\sin at$

$$s' = x'\cos at + z'\sin at$$

$$s'' = x''\cos at + z''\sin at + a(-x'\sin at + z'\cos at)$$

or $s'' = x'' \cos at + z'' \sin at + a^2 s$

and eliminating x'' and Z''

$$s'' - a^2 s = g \sin at$$

Allgemein Integral is

$$s = -\frac{g}{2a^2} \sin at + c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$$

für $t=0$ take $s=0$ and $s' = \frac{g}{2a^2}$

we get $c_1 + c_2 = 0$ and $c_1 - c_2 = 0$

or $s = -\frac{g}{2a^2} \sin at$ or circle.

Foucaults Pendulum.

N, n, y, ξ, ξ, x, O, $\cos\psi$, ξ, z

coordinates of point O are

$$x = \cos\psi \cos\vartheta$$
$$y = \cos\psi \sin\vartheta$$
$$z = 0$$

$$(x - \cos\psi\cos\vartheta)^2 + (y - \cos\psi \sin\vartheta)^2 + z^2 = r^2$$

is our nebenbedingung.

$$\ddot{x} = \frac{-gx}{\sqrt{(x^2+y^2+z+\sin\psi)}^3} \quad \ddot{y} = \frac{-gy}{\sqrt{\quad}^3} \quad \ddot{z} = \frac{g(z+\sin\psi)}{\sqrt{\quad}^3}$$

Now take up examples for non-holonom systems of conditions.

General Lagrangian equations are

$$m x'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x'} \qquad f(x', y' z' x y z t) = 0$$

$$m y'' =$$

$$m z'' =$$

Take the simple case where the given condition is $y' - t x' = 0$ or $\frac{dy}{dx} = t$.

$$x'' = -\lambda t \quad \Big| \; x'$$

$$y'' = \lambda \quad \Big| \; y'$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(x'^2 + y'^2)}{dt} = 0$$

$$x'^2 + y'^2 = V^2$$

which satisfies the Hertzian Princip since $f = y' - t x'$ is homogeneous in y'; x'.

Ersetzen wir nun y' aus der Neben-bedingung, so ergibt sich: –

And $x'^2 + t^2 x'^2 = V^2$

$$x' = \frac{V}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \frac{Vt}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$x = V\,l\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + c_1$$

$$y = V\sqrt{1+t^2} + c_2$$

$$e^{\frac{x-c_1}{V}} = t + \frac{y-c_1}{V}$$

If $t=0$, $x=0$, $y=V$ then c_1, c_2 are 0

Geometrische Beispiel.

Condition is $xy' - yx' - z' = 0$

or $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx}$

Kein Kraft.

Must ask first if our equation may be replaced by $f(xyz) = c$

or $\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z' = 0$

Wenn man hat $P(xyz)x' + Q(xyz)y' + R(xyz)z' = 0$

One must build

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0$$

which is the necessary and sufficient condition that $Px' + Qy' + Rz' = 0$ is integrable.

P, Q, R gives us a vectorfeld.

$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ ect. gives us a vector which is called <u>Curl</u> $(P, Q\, R)$

Make Scalar product of Curl and vector (P, Q, R) and

$$\text{Curl}(P, Q, R) \cdot (P, Q, R) = 0$$

Nun wollen wir unser Lagrang. gleichungen aufstellen $P = -y,\ Q = x,\ R = -1$

$$\begin{array}{r|l} x'' = -\lambda y & x' \\ y'' = \lambda x & y' \\ z'' = -\lambda & z' \end{array}$$

$$V^2 = \text{const.}$$

Now mul. the 3 eq. with $-y, x, -1$ resp.

$$xy'' - yx'' - z'' = \lambda(y^2 + x^2 + 1)$$

and from our condition equation

$$xy'' - yx'' - z'' = 0$$

so $x'' = 0$ $\qquad x = at + a,$

$y'' = 0$ $\qquad y = bt + b,$

$z'' = 0$ $\qquad z = ct + c$

or motion is in straight line

but $a, b - b, a - c = 0$

$$y = Ax + B$$
$$z = -Bx + C$$

Dec. 4
(21)(22)

$$\frac{dy}{dx} = f(x\,y\,t)$$

$$y' - x' f(\quad) = 0$$

$$x'' = -\lambda f \quad \Big| \quad x'$$
$$y'' = \lambda \quad \Big| \quad y'$$

$$x'^2 + y'^2 = \text{const}$$

Noch ein Beispiel

$$\frac{dy}{dx} = z \quad = \text{nebenbedingung}$$

or $y' - x'z = 0$

$$x'' = -\lambda z \quad \left| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\} \text{mul. and add}$$

$$y'' = \lambda$$

$$z'' = 0$$

$$x'^2 + y'^2 = C \quad \text{weil } z' = C_0$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = \frac{C}{} = G$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + z^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = C$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{C^2}{1+z^2}$$

$$x = C\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} + c'' = C\,l\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) + c''$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{zC}{\sqrt{1+z^2}}, \quad y = C\sqrt{1+z^2} + c'''$$

$$e^{\frac{x-c'}{c}} = z + \frac{y - c'''}{c}$$

To find λ.

$$y'' - x''z - x'z' = 0$$

$$\lambda + \lambda z^2 - x'c' = 0$$

$$\lambda = \frac{c'x'}{1+z^2} =$$

Par. IX
Potential einer Kraft.

Par. IX. Potential einer Kraft.

Neue Begriff.

Here our Kraftfeld is vector field which does not depend on t.

$$\left.\begin{aligned} X = X(xyz) &= \frac{\partial F(xyz)}{\partial x} \\ Y = Y(xyz) &= \frac{\partial F(xyz)}{\partial y} \\ Z = Z(xyz) &= \frac{\partial F(xyz)}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{assumed.}$$

Here we need only to know one function F instead of 3

All problems will not have an F.

F is called Kraftfunction.

All of our problems in this course have an F.

When a force is always directed towards a point and is a function of distance to that

point <u>then we always have an F</u>.

To prove. $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$

$$K(\rho)\frac{x}{\rho}, \quad K(\rho)\frac{y}{\rho}, \quad K(\rho)\frac{z}{\rho} = \text{components}.$$

$$F = \int K(\rho)\, d\rho = \text{Kraftfunction} = F(\rho)$$

$$\frac{dF}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = K(\rho)\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\rho^2}{\partial x} = K\cdot\frac{x}{\rho} = X$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \quad - \quad - \quad - \qquad = Y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \quad - \quad - \quad - \qquad = Z$$

When X_1 Y_1 Z_1 have an F_1

" X_2 Y_2 Z_2 " " F_2

Then X_1+X_2, Y_1+Y_2. Z_1+Z_2 has F_1+F_2.

What sort of a condition is the assumption of existence of an F.

called <u>curl</u>.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{necessary.}$$

Now show that these are sufficient

$$F(xyz) = \int_a^x X(xyz)\,dx + \int_b^y Y(a,y,z)\,dy \int_c^z Z(a\,b\,z)\,dz$$

Will show that this is our fct.

Differentiate

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx + Y(a,y,x)$$

$$= \Big[Y(xyz\Big]_a^x + Y(a\,y\,x)$$

$$= Y.$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_a^x \frac{\partial Z}{\partial x}\,dx + \int_b^y \frac{\partial Z}{\partial y}(ayz)\,dy + Z(a\,b\,z)$$

$$= \Big[Z(xyz)\Big]_a^x + \Big[Z(a\,y\,z)\Big]_b^y + Z(a\,b\,z)$$

$$= Z$$

F + const makes no change.

F ist eindeutig bestimmt bis auf add. const.

F ist <u>scalar</u>

(X, Y, Z) ist Vector.

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial x}, -\frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \text{gradient vector.}$$

Wenn das Curl eines Vectors verschwindet, dann existiert Kraftfunction.

Negative Kräfte Fct ≡ Potential

$$U(xyz) = -F(xyz)$$

$$\text{grad. } U = K, \quad \underline{\text{curl } K = 0}$$

$$X = -\frac{\partial U(xyz)}{\partial x}$$

$$Y = -\frac{\partial U(xyz)}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial U(xyz)}{\partial z}$$

$\alpha\beta\gamma$

abc

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha s + a \\ y &= \beta s + b \\ z &= \gamma s + c \end{aligned}\right\} \text{equation of line}$$

Componenten unser Kraft in

richtung dieser Linie $= \alpha X, \beta Y, \gamma Z$

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial s} \qquad = -\frac{\partial U}{\partial s}$$

wenn

$U =$ const ist Niveau oder Potential Fläche.

$\frac{\partial U}{\partial s}$ in this surface is $= 0$.

Grösse der Kraft $= -\frac{\partial U}{\partial n}$ for Kraft is $\perp$ to Potential surface.

$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z}$ give its direction cosines of surface.

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\quad}}, \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\quad}}$$

Orthogonal Trajectories.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial n} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = X\\ \frac{\partial y}{\partial n} &= -\frac{\partial U}{\partial y} = Y\\ \frac{\partial z}{\partial n} &= -\frac{\partial U}{\partial z} = Z\end{aligned}\right\}$$

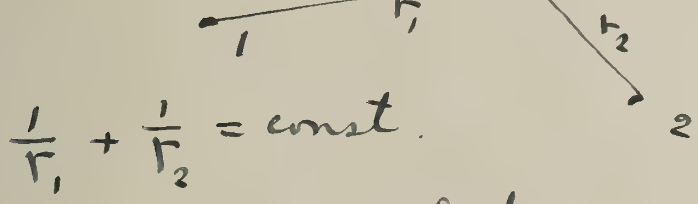
= 3 dif. gl. which give curves ⊥ to our potential surface.

Beispiel. Schwerkraft.

$$U = -gz$$

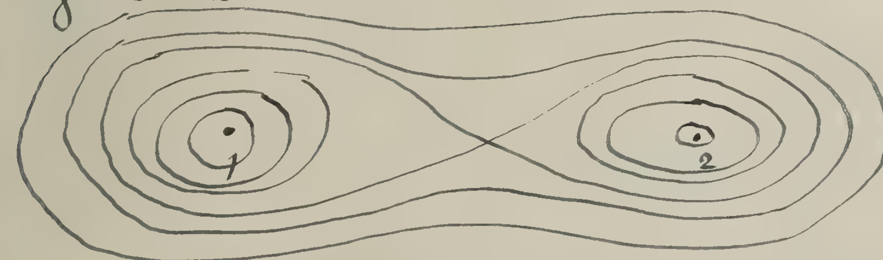
$z =$ const = niveau Fläche.

Beispiel. Body acted on by two bodies.



$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{const}.$$

give us Niveau Fläche



$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = C$ for the ∞ curve (Lemniscate)

Let $r_1 + r_2 = a$, $\quad C = \frac{4}{a}$

when pt. is on x axis
between 1 and 2
or 1 —— 2 = a

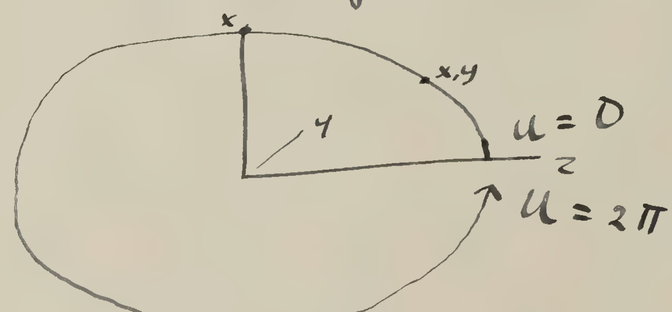
Es ist nicht notwendig dass unser Potential eindeutig ist. z. B.

z
y
. xy = electrisches Teilchen
magnetic centrum = 0
z

$$X = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{-x}{x^2+y^2}, \quad Z = 0$$

or eindeutig Functionen

$$U = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \text{mehrdeutig}.$$



$$\Delta U = 0 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

What has this to do with our Potential

This is same as

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

Divergence des Kraft Feld.

Gravitations Kraft ist die einzige Central Kraft dem Divergence verschwindet, weil

$$r = \text{entfernung} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$X = \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{r^3} + x\frac{\partial r^{-3}}{\partial x} = -3x^2 r^{-5} + \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{r_3} + \cdots \qquad = -3y^2 r^{-5} + \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{r^3} + \cdots \qquad = -3z^2 r^{-5} + \frac{1}{r_3}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - 3r^{-3} = 0$$

Verbinden abc und xyz mit beliebig Curve

abc ⟶ xyz

This path is $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$

$$\int_{abc}^{xyz}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

When is this integral independent of the path.

When X, Y, Z ~~have~~ Potential

the $\int_{abc}^{xyz} = F'(xyz) - F'(abc)$

When we have an Integral independent of path then $X = \frac{\partial F}{\partial x}$

Dec. 7.
(23), (24)

xyz
a'b'c'
abc

Statt s können wir t als parameter nehmen.

$$\int_{abc}^{xyz}(Xx'+Yy'+Zz')\,dt = F(xyz)$$

In the case where we have a function like $F(xyz) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ which increases by 2π as it (the integral) goes around origin, the above discussion means that integral is independent of path about origin. That is any path around origin yields same increase or decrease in value.

Has Potential a meaning when X, Y, Z depend on velocity as well as x, y z.

$$X = X(x, y\, z, x'y'z'\, x''y''z'')$$
$$Y = Y(\qquad\qquad\qquad)$$
$$Z = Z(\qquad\qquad\qquad)$$

$$Xx'+Yy'+Zz' = \frac{dF}{dt}$$

or we can write it as <u>scalar product</u>

$$K \cdot W = \frac{dF}{dt}$$

Now mul. X mit x', Y mit y', Z mit z'
Add and ask if left hand side is $\frac{dF}{dt}$.
If it can be written

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial x'} x'' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial z'} z''$$

then $\int (X x' + Y y' + Z z') dt = F(x y z, x' y' z')$

Beispiel. <u>Widerstands Kraft</u>:

$$W = \left(-\kappa \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \cdot x', \; -\kappa \sqrt{\ } \, y', \; -\kappa \sqrt{\ } \, z'\right)$$

Es existiert keine Kraftfunction.

Beispiel. Webersche Kraft Gesetz.

$$X = \frac{x}{r^3}\left(1 - \kappa^2 r'^2 + 2\kappa^2 r r''\right)$$

$$Y = \frac{y}{r^3}\left(\qquad \right)$$

$$Z = \frac{z}{r^3}\left(\qquad \right).$$

Notice both 1st and 2nd derivatives come in here, since $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $r' = \frac{\ }{\ }$ $r'' = —$

Does a Potential exist?

Compute $Xx' + Yy' + Zz'$

It equals $\frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}\left(1 - \kappa^2 r'^2 + 2\kappa^2 r r''\right)$

$$= \frac{r'}{r^2}\left(1 - \kappa^2 r'^2 + 2\kappa^2 r r''\right)$$

und dies ist nichts anders als

$$-\frac{d\left(\frac{1-\kappa^2 r'^2}{r}\right)}{dt}$$

Potential for this case exists.

and $F = -\left(\frac{1-\kappa^2 r'^2}{r}\right)$

When $r' = 0$ then F is the same as for Newtons law where $F = -\frac{1}{r}$

Par. X. Der Satz von der Hält der Energie.

x' | $mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \left(+ \lambda \frac{\partial f}{\partial x'} + \cdots \right)$

y' | $my'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$

z' | $mz'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \cdots$

mul. und add

$$\frac{m}{2} \frac{d(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \lambda 0 + \mu \cdot 0$$

Wir nehmen an ein Potential existiert.

für X Y Z

$$x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dt}$$ if f does not contain t explicitly. But $f = 0$ so $\frac{df}{dt} = 0$

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + z' \frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$ if f is homogeneous in $x'y'z'$

So we assume f does not contain t explicitly and for nicht holonom case f is homogeneous in $x'y'z'$.

$$\frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m}{2} V^2 = T$$

= Kinetische Energie

Früher nennt man dies "Lebendige Kraft"
aber Kraft ist vector, und T ist <u>scalar</u>.

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \qquad T + U = \mathcal{E}$$

U = <u>Potential Energie.</u>

<u>T + U</u> is independent of t.

<u>$\mathcal{E}$ = gesammt Energie = const.</u>

One energy changes (decreases) at expense of the other.

<u>Begriff der Arbeit.</u>

When we compute on this path (from 1 to 2)

$$-\int_1^2 (X x' + Y y' + Z z')\,dt = U(x_2 y_2 z_2) - U(x_1 y_1 z_1)$$

$= A_{12}$ = <u>Arbeit</u>

Arbeit abnimmt wenn
" zunimmt "

Uhrgewicht

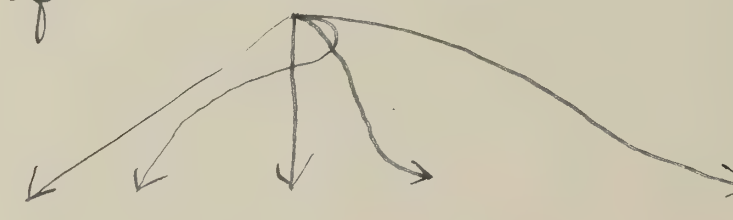
Beispiel - Freie Fall

$$\frac{1}{2}v^2 - gz = \text{const}$$

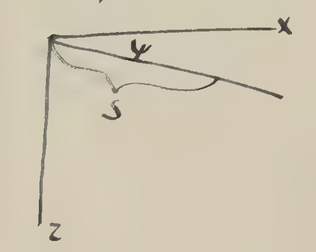
Beispiel. Schiefe Ebene ohne Reibung

Same as for freie Fall.

If $z = 0$ and $v = 0$ then $\frac{1}{2}v^2 = gz$



Beispiel. Drehende Ebene



Plane is turned through angle $\psi = ct$

$$s' = x'\cos\psi + z'\psi$$

$$s' = x'\cos ct + z'\sin ct$$

$x'\sin ct - z'\cos ct + cs = 0$ ←

$x'^2 + z'^2 = c^2 s + s'^2$ by squaring out.

$s = ae^{ct} + be^{-ct}$

$x'^2 + z'^2 = c^2(a^2 e^{2ct} + b^2 e^{-2ct})$

$(\text{velocity})^2 = \text{const.}$

Our turning plane contains t explicitly

$x \sin ct - z \cos ct = 0$

Dec. 11
(25), (26)

Beispiel - Planeten Bewegung.

x, y, z

0,0,0

$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{1}{r} = \text{const}$

K.E + P.E = "

And the larger r is the smaller the velocity

Beispiel. Elastische Kraft

$mx'' = -k^2 x$

$my'' = -k^2 y$

$mz'' = -k^2 z$

Here $\mathfrak{U} = k^2 r^2$

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$\frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + k^2 r^2 = \text{const.}$$

Beispiel. Wo Ableitung einkommt.

Bewegung in widerstehenden Medium.

$$\left.\begin{aligned} m x'' &= X - \kappa x' \\ m y'' &= Y - \kappa y' \\ m z'' &= Z - \kappa z' \end{aligned}\right| \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt^2}$$

$$\frac{d(T + \mathfrak{U})}{dt} = -\kappa(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

$$\frac{dE}{dt} < 0$$

E decreases with time. <u>not constant</u>

<u>where derivative occurs in equations</u>

Total energy decreases, as for instance a body moving on rough surface.

<u>Beispiel</u>. Wurf in widerstehenden Medium.

Velocity tends towards a constant

z

Beispiel - Webers Law. 2nd ableitung occurs in this case.

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{r}(1-\kappa^2 r'^2)$$

$$x'' = X$$
$$y'' = Y$$
$$z'' = Z$$

$$x'X + y'Y + z'Z = -\frac{d\mathfrak{U}}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{d\mathfrak{U}}{dt} = 0 \text{ or } T + \mathfrak{U} = \text{const}$$

Or <u>Energy Law holds here.</u>

If an electric partical returns to its original position not only (must) r same as for former but r' must be same

since $\mathfrak{U} = \text{fct.}(r')$

This Law of Conservation of Energy follows from Gauss's principle "kleinste Zwang". It is a <u>theorem not a principle</u>

Now we come to a principle which is a minimal principle like Gauss's but opposed to that in the fact that it is an integral principle and here we have to determine a function to determine instead of a value of the function

Par. Hamilton, Euler, .

From here on we will take up Variations-rechnung.

Grund Idee

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x', x, t)\, dt \qquad F \text{ gegeben}$$

Problem is to find $x = x(t)$ which makes

$\int$ a min and $x_1 = x(t_1)$ $x_2 = x(t_2)$

Let us take

$$x(t) + \varepsilon\,\xi(t) \quad \text{wo } \xi(t_1) = 0,\ \xi(t_2) = 0$$

Then $\int_{t_1}^{t_2} F(x' + \varepsilon\xi',\ x + \varepsilon\xi,\ t)\,dt = F(\varepsilon)$

then $\left(\frac{d\,F(\varepsilon)}{d\,\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0$

or $\int_{t_1}^{t_2}\left(\xi'\frac{\partial F}{\partial x'} + \xi\frac{\partial F}{dx}\right)dt = 0 =$ 1st Variation

Derivation of Lagrangian Equations.

$$\frac{d\,\frac{\partial F}{dx'}}{dt} - \frac{\partial F}{dx} = 0$$

in usual way by integration by parts.

Hinreichend Bedingungen.

1.) t_1 and t_2 must lie within certain limits

stückweise Variation

2.) $x'(t)$ not much different in its values, a weak variation, a regular variation

3.) Legend. Bedingung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} > 0$$

Suppose we have more functions

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x', y', z' x y z t)\, dt = \min.$$

Then we get 3 Lagrangian equations

$$\left.\begin{aligned} \frac{d F_{x'}}{dt} - \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d F_{y'}}{dt} + F_y &= 0 \\ \frac{d F_{z'}}{dt} + F_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ with 6 Randbedingungen

1), 2) have to hold as above.

3) $u^2 F_{x'x'} + 2uv F_{x'y'} + v^2 F_{y'y'} + 2uw F_{x'y}$
$+ w^2 F_{z'z'} + 2vw F_{y'z'} > 0$ for all values of t.

Dec. 14. (27), (28)

This is varied by having conditional equations which $y', z', x'\ x\ y\ z\ t$ must satisfy say $G(x' y' z' x y z, t) = 0$.

Solved by the Lag. mul. method which calls for a solution of the problem

$$\int_{t_1}^{t_2}(F+\lambda G)\,dt = \text{min.}$$

Here we have the 3 Lag. equations and also $G=0$. A set of 4 equations with 4 unknowns x, y, z, λ.

With more than one conditional equation say $H(x'y'z'xyzt)=0$ our integrand is $F+\lambda G+\mu H+ --$ and we have one equation and one unknown added for each conditional equation.

Hamilton's Principle

Think of two times t_1, t_2 not too far apart then

$$\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\,dt$$

by the real motion is a minimum when compared with other

T is kinetic energy
$\mathcal{U}$ is given fct. of (xyz)

For the real path, then $\int (T-\mathcal{U})\,dt$ is a min.

So $T-\mathcal{U} \equiv F$ in general problem,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-\mathcal{U})}{\partial x'} - \frac{\partial(T-\mathcal{U})}{\partial x}.$$

or since T does not contain x, y, z and $\mathcal{U}$ does not contain $x'y'z'$,

$$mx'' + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 0$$

which are Newtons equations.

If the point is constrained to stay on

a surface say, we have one or more conditional equations $f(xyz)=0$ and our Lag. equations have the Lag. constants λ, μ etc in them and we get as above

$$m x'' + \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Notice here that the Hamilton principle and the Lag. equations of motion (Newtons eq.) are the result one of the other. Assume one and get the other.

Euler's Principle. Called sometimes Maupertuis's Principle.

Wir haben gesehen dass

$$T + U = E.$$

and out of Ham. prin. we get $\int_{t_1}^{t_2} T\,dt = \text{min}.$
If we take as problem this $\int$ to be made a min under the condition $T + U = E$

but we must modify our limits of our integrals and let our upper limit t_2 be undetermined

This principle is formulated thus:

Die Beweg. eines Massenpunkts findet so statt dass wenn wir haben anfangs time and Ort und nicht zu fern End ort, . .

das $\int_{t_1}^{t}$ by the real motion is a minimum in comparison with all motions which are compatible with the conditions and for which $T + U = E$ and which from anfangspunkt zu Zeit t_1 to t_2 führen

<u>Zu Beweisen</u>

Assume we have {the end time t_2 / the motion} $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Think of motion $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$ which for $\varepsilon = 0$ gives us $x(t)$ - - .

at time $t = t_2 + \varepsilon$ $\quad x(t,\varepsilon)_{t=t_2+\varepsilon} = x(t_2) = x_2$

Develope $x(t,\varepsilon) = x(t) + \varepsilon(t) + \varepsilon^2(t)$ — —

$x'(t_2) + \xi(t_2) = 0 \qquad x'(t_2) = -\xi(t_2)$

comes from

$\left(x(t) + \varepsilon(\;) + \varepsilon^2 \cdots \right)_{t_2+\varepsilon} = x(t_2)$

or $x(t_2) + \xi x'(t) + \cdots \;) = x(t_2)$

$\int_{t_1}^{t} (T - U + E)\,dt$ = min is same as $\int_{t_1}^{t} T\,dt$ = min

As above we can get

$y'(t_2) = -\eta(t_2), \qquad z'(t_2) = -\zeta(t_2)$

We have to discuss

$\int_{t_2}^{t} F\,dt$ = min

now $F = (T - U + E) + \lambda(T + U + E)$

$\int_{t}^{t_2+\varepsilon} F(x'(t), y'(t), z'(t), \lambda(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon)\, x(t,\varepsilon)\, t)\, dt$ = min.

$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_{t}^{t_2+\varepsilon} F(\quad)\,dt\right] = 0$

$= F(x'(t_2)\, y'(t_2), z'(t_2)\, x(t_2), y(t_2), z(t_2)\, t_2) + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\xi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial z'}\zeta'\right.$

$\left. + \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta\right)dt = 0$

$$\left[F\right]_{t=t_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial x'}\xi\right]_{t=t_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right]_{t=t_2} + \left[\frac{\partial F}{\partial z'}\zeta\right]_{t=t_2}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)\xi + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\eta + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z}\right)\zeta\right\}$$

Each ( ) here must vanish

so we have left

$t=t_2$

$$F - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}x' + \frac{\partial F}{\partial y'}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z'\right) = 0$$

$$~~F~~\; T - U + E - 2(1+\lambda)\,T = 0$$

$$2T - 2(1+\lambda)\,T = 0$$

or $\lambda = 0$

and $\lambda(t_2)$ must vanish.

and the Lag. gleichungen gültig sind.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\cdot\;\cdot \qquad = 0$$

$$= 0$$

Out of this follows easily Jacobi's principle.
Eliminate t and use s = bogen länge.

$$T = \mathcal{E} - \mathcal{U} = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}}\ \frac{ds}{dt}\sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{U}}.$$

and our principle becomes

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{U}}\ ds = \text{min} = \underline{\underline{\text{Jacobi Princip}}}$$

which gives us nothing about ~~path~~ motion but gives us the path.
When no force is used, $\sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{U}} = 0$ and our principle says length of curve = min.

Dec. 18
(29), (30)

We have spoken of 3 principles
Hamiltons
Transpositions (Euler).
Jacobi.

Hamiltons says

$T - \mathcal{U} = L$

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \text{min}$$

Euler, Maupertuis princip ist

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} T\, dt = \text{min}, \quad \text{where } T + \mathcal{U} = \mathcal{E}$$

Herr Helmholz. sagt wir müssen eine neue variable s brauchen.

$$\begin{array}{l|l} x = x(t) & : = x(s) \\ y = y(t) & : = y(s) \\ z = z(t) & : = z(s) \\ t = t(s) & \end{array}$$

$\frac{dx}{ds} \equiv x_s$ etc

$$\int_{s_1}^{s_2} T\, t_s\, ds = \text{min} \quad \text{while } T + \mathcal{U} = \mathcal{E}$$

is true for $x = x(s)$ etc

$$T = \frac{m}{2} \frac{(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2)}{t_s^2} = \frac{S(x_s, y_s, z_s)}{t_s^2}$$

and the condition becomes

$$\frac{S}{t_s^2} + \mathcal{U} = \mathcal{E}$$

and integral is

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{S}{t_s}\, ds = \text{min}$$

We handle this as follows.

Let $F = \frac{s}{t_s} + \lambda(s)\left(\frac{s}{t_s^2} + \mathcal{U}\right)$

Set 1st. variation = 0

First let $t = t + \tau$ $\quad \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial F}{\partial t_s} \tau_s \, ds = 0$

$t_s = t_s + \tau_s$

and Lagrangian equations are

$$\frac{\partial F}{\partial t_s} = 0 \qquad -\frac{S}{t_s^2} - 2\lambda \frac{S}{t_s^3} = 0$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} t_s$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial t_s(T-\mathcal{U})}{\partial x_s}\right) - \frac{\partial t_s(T-\mathcal{U})}{\partial x} = 0 \qquad F = \frac{1}{2}\frac{S}{t_s} - \frac{1}{2}\mathcal{U} t_s$$

which is

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-\mathcal{U})}{\partial x'} - \frac{\partial(T-\mathcal{U})}{\partial x} = 0 \qquad = \tfrac{1}{2} t_s (T-\mathcal{U})$$

and of course two other equations for y and z. These are same equations as for Hamilton principle. The two are then <u>identical</u>.

If there is no potential energy new kinetic then this principle becomes

Jacobi's Princip. $T = \mathcal{E} - \mathcal{U} = F$

$dS =$ bogenelement

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{T}{\frac{m}{2}}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m}{2}}}$$

$$T = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{ds}{dt}\sqrt{F}$$

$$\int_{S_1}^{S_2} \sqrt{F}\, ds = \min$$

where F is force function

2

1

The path which a point describes has the property that the path is shortest if F = const. (if 1 and 2 are not too far apart)

Beispiel. Point is constrained to move on sphere $f(xyz) = x^2+y^2+z^2-1=0$

$$x'' = 2\lambda x$$
$$y'' = 2\lambda y$$
$$z'' = 2\lambda z$$

$$\begin{cases} yx'' - xy'' = 0 \\ yx' - xy' = c \end{cases} \quad \Big| \; z$$
$$zy' - yz' = a \quad \Big| \; x$$
$$xz' - zx' = b \quad \Big| \; y$$

$$ax + by + cz = 0$$

This is a plane passing through the origin and cuts sphere in great circle so our point moves on great circle = geodesic.

$\Omega(xyz)$ = Lichtgeschwindigkeit $= \frac{ds}{dt}$ is independent of direction.

Licht bewegt so dass Zeit ist min

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{s_1}^{s_2} \frac{f}{\frac{ds}{dt}} dt = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\Omega} = \text{min.}$$

or $\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{F}\, ds = \text{min}.$

$$\Omega(x, yz) = \frac{1}{\sqrt{F(xyz)}}$$

and we get the connection between the Optic and mechanical problem.

Beispiel. Freie Fall.

$$F = gz$$

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{z}}$$ = Brechungsverhaltnisse and light moves in parabolas

$$\int \sqrt{z}\, ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{z(1+(\frac{dz}{dx})^2}\, dx = \text{min}$$

Beispiel. Ω changes as we approach earth say $\Omega = z$. Optische dichte nimmt ab als wir near the earth.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(\frac{dz}{dx})^2}}{z}\, dx = \text{min}$$

= bogenlange nicht Euklid. geom.

So when $F = \frac{1}{z^2}$ will a bullet go in a circle not in parabola

Suppose t comes into our equations explicitly

$$m x'' = -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m y'' = -$$

$$m z'' = \qquad\qquad f(x y z t) = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,dt = \min$$

and Hamilton principle holds same as if t does not occur explicitly. But this is not true for the Euler-Maupertuis and Jacobi principles. If in Ham. prin. we have $f(x'y'z'xyzt) = 0$ (nicht holonom bedingungen). z. B. $xy' - yx' - z' = 0$ where the path curves we found to be straight lines $\begin{cases} y = Ax - B \\ z = -Bx + C \end{cases}$ the prin does not hold.

Weber Gesetz.

$$X = \frac{x}{r^3}\left(1 - r'^2 + 2rr''\right)$$

$$Y =$$

Take only $X = \frac{1}{x^2}\left(1 - x'^2 + 2xx''\right)$ $\left(= x'' \text{ for Newton gesetz}\right)$

Wie ist nicht Ham. princ.

$$X = -\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'}$$

wenn $W = \frac{1}{x}(1 + x'^2)$
which we may call a potential, notice
it depends on velocity, and we may

call it <u>kinetic potential</u>.

Ham. prin. ist.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \tfrac{1}{2} x'^2 - \tfrac{1}{x}(1 + x'^2) \right\} dt = \text{min}$$

$$\left(x' - \frac{2x'}{x}\right)' + \frac{1}{x'^2}(1 + x'^2) = 0$$

$$x'' = \frac{2xx'' - 2x'^2}{x'^2} - \frac{1 + x'^2}{x^2} = X$$

Hamiltons prin. holds in this case

The energy law also holds as shown below.

Jan. 11. 1906
(31) (32)

Es handelt sich von endlich viel Massenpunkt.

Represent these points by $1 = x_1 y_1 z_1$
$2 = x_2 y_2 z_2$
etc

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ - \; - \; - \\ y_1 = y_1(t) \\ - \; - \; - \\ z_1 = z_1(t) \\ - \; - \; - \end{array}\right\} 3n \text{ functions}$$

If we know these we know the motion.

Kraftsystem; auf jede Punkt ist vector - - -

Etwa $(X_1 Y_1 Z_1) = K_1$ auf $x_1 y_1 z_1$

" $(X_n Y_n Z_n = K_n$ " $x_n y_n z_n$

Force may depend on position of $x_i y_i z_i$. It may also depend on the position of all the other points a part of them.

That is the other points may affect the motion of 1.

Newtons equations.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 L_1 = K_1 \\ \text{--- ---} \\ m_n L_n = K_n \end{array}\right\} \text{or mass} \times \text{accelleration} = \text{force}.$$

or

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1, \; m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1$$

and so on for m_2, m_3 - - - - -

The number of equations equals the number of unknowns, x_1 - - - - - z_n

As shown before we can make our 3 n equations of the second order into 6 n equations of first order.

The solution will contain 6 n constants

$$x_i = f(t, c_1 \text{ - - - - } c_{6n})$$

Fixing direction and position gives 6 n beginning conditions.

X_1 etc. are functions of x_1 - - - - z_n

Now X_1 it may depend on time or t which complicates matters, or it may with same result depend on velocity

Think of 3 points $\quad$ 1 —— 2

$\cdot$ 3

According to Newton

$$\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = \text{attraction between 1 and 2}$$

$$-\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} = x \text{ component}$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} - m_1 m_3 \frac{x_1 - x_3}{r_{13}^3}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2}{r_{12}^3}(x_2 - x_1) + \frac{m_3}{r_{13}^3}(x_3 - x_1)$$

also

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{m_2}{r_{12}^3}(y_2 - y_1) + \frac{m_3}{r_{13}^3}(y_3 - y_1)$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{m_2}{r_{12}^3}(z_2 - z_1) + \frac{m_3}{r_{13}^3}(z_3 - z_1)$$

and so on, — altogether 9 equations

last one being

$$\frac{d^2 z_3}{dt^2} = \frac{m_1}{r_{31}^3}(z_1 - z_3) + \frac{m_2}{r_{32}^2}(z_1 - z_2)$$

If motion is in a plane the equations in z fall out. We have six equations left. Integration of these equations is very difficult and has occupied the attention of mathematicians up to present time.

When we have 2 points the problem can be completely solved. We will take it for the plane only.

Our equations are

$$\frac{dx_1^2}{dt^2} = \frac{m_2}{r_{12}^3}(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dy_1^2}{dt^2} = \frac{m_2}{r_{12}^3}(y_2 - y_1)$$

$$\frac{dx_2^2}{dt^2} = \frac{m_1}{r_{12}^3}(x_1 - x_2)$$

$$\frac{dy_2^2}{dt^2} = \frac{m_1}{r_{12}^3}(y_1 - y_2)$$

Out of these we get

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0.$$

These are second derivatives of

$$\left.\begin{matrix} m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 \end{matrix}\right\} \text{linear functions of } t.$$

Substitute for x_1, ξ_1 + a linear fct. of t.
" " y_1, η_1 + " " " "

and so on.

Then
$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 = 0$$
$$m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 = 0$$
- - - - - - -

The substitution does not change our differential equations at all

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= \frac{m_2}{r_{12}^3}(\xi_2 - \xi_1) \\ &= -\frac{m\,\xi_1}{r_{12}^2} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \xi_2 = -\dfrac{m_1 \xi_1}{m_2} \\ m = m_1 + m_2 \end{matrix}$$

$$\xi_1'' = \frac{m_2}{r_{12}}(\xi_2 - \xi_1) = -\frac{m}{r_{12}^3}\xi_1$$

$$\eta_1'' = \cdots = -\frac{m}{r_{12}^3}\eta_1$$

ect.

These equations give motion relative to other point.

Let this point be the origin and we get

$$\xi_1'' = -m\left(\frac{m_2}{m}\right)^3\frac{\xi_1}{r_1^3}$$

We get our motion referred to motion about the center of gravity.

What has a force function to say here in the problem of n points

$$x_1'' = \underbrace{\frac{m_2}{r_{12}^3}(x_2 - x_1) + \frac{m_3}{r_{12}^3}(x_3 - x_1)}_{X_1}$$

F will be a function of $x_1 \cdots\cdots z_n$ so that $X_1 = \dfrac{\partial F}{\partial x_1}$.

Such a force function exists and is very simple

$$F(x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n) =$$

$$\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{m_{n-1} m_n}{r_{n-1,n}}$$

$$X_1 = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}$$

and
$$m_1 x_1'' = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$
$$m_1 y_1'' = \frac{\partial F}{\partial y_1}$$
ect.

This is Newtonian potential.

See Boltzman's works on this.

Now suppose we have our points limited to a surface or some such condition attached.

Newtons equations don't go here.

Must use "Princip kleinste Zwang"

We have

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1'' &= X_1 \\ m_1 y_1'' &= Y_1 \\ m_1 z_1'' &= Z_1 \end{aligned}\right\} \text{ with } f(xyz) = 0$$

$$\text{Zwang} = \frac{1}{m}\left\{(m_1x_1''-X_1)^2+(m_1y_1''-Y_1)^2+(m_1z_1''-Z_1)^2\right\} = \text{min}.$$

while

$$x_1''\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_1''\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_1''\frac{\partial f}{\partial z_1}+(x',y',z',x,y,z) = 0$$

$$m_1 x_1'' = X_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

ect

for n points we have $3n$ equations and

$$f(x_1 y_1 z_1 \text{ - - - - } x_n y_n z_n) = 0$$

But the method of "kleinst Zwang" can be used only when all masses are alike. A point of great mass has more effect than point of small mass. Hence we must give weights to our m's. Let m_1, m_2 - - - be

whole numbers. If $m_2 = 3$ and $m_1 = 1$ then use 3 equations for point 2 and one equation for point 1. Thus our number of equations is increased but our masses are alike and we can use the method of "kleinste Zwang" on our new system.

Jan. 15
(33), (34).

If masses are all alike we can say

$$\text{Zwang} = \sum\left\{(x''-X)^2+(y''-Y)^2+(z''-Z)^2\right\}$$

And from above for point 1 in general we have

$$1 : x_1^{(1)}, y_1^{(1)} z_1^{(1)} \cdots \quad x_1^{(m)}, y_1^{(m)}, z_1^{(m)}$$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = \cdots$$

$$y^{(1)} = y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = \cdots$$

etc.

As for the forces

$$X_1 = X_1^{(1)} + X_1^{(2)} + \cdots + X_1^{(m_1)}$$

$$Y_1 = Y_1^{(1)} + \cdots + Y_1^{(m_1)}$$

$$Z_1 = Z_1^{(1)} + + \cdots + Z_1^{(m_1)}$$

$$Zwang = \left(x_1^{(1)''} + X_1^{(1)}\right)^2 + \left(x_1^{(2)''} - X_1^{(2)}\right)^2 + \cdots$$

$$= m_1 x_1''^2 - 2x_1''\underbrace{\left(X_1^{(1)} + X_1^{(2)} + \cdots + X_1^{(m)}\right)}_{=X_1} + (\ \ ) + \cdots$$

$$= \frac{1}{m_1}\left(m_1 x'' - X_1\right)^2 +$$

$$Zwang = \sum_{1,2\cdots n} \frac{1}{m_h}\left\{\left(m_h x_h'' - X_h\right)^2 + \left(m_h y_h'' - Y_h\right)^2 + \left(m_h z_h'' - Z_h\right)^2\right\}$$

Wie findet die Beschleunigung statt?

We had conditional equations given.

$$f(x_1\ y_1\ z_1 \cdots x_n y_n z_n\ t) = 0$$

From this

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \cdots\cdots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1' + \cdots = 0$$

$$\frac{1}{m_1}\left\{(m_1 x_1'' - X_1)^2 + (\ \ )^2 + (\ \ )^2\right\} + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \cdots\right)$$

and out of this

$$2(m_1 x_1'' - X_1) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$2(m_1 y_1'' - Y_1) + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

ect

and our Lag. equations are

$$m_1 x_1'' = X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

– – – – – –

– – – – –

$$m_n z_n'' = Z_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

and with m conditional equations we have $3n + m$ equations.

If our conditional equation contains $x_1' \; y_1' \; z_1'$ ect.
we have to differentiate only once to get $x_1'' \; y_1''$ ect.
Our Lag. equations are of same form as before but the last terms are $\lambda \frac{\partial f}{\partial x_1'}$ ect.

The Hertz principle for n points gives no difficulty
We think of $N = 3n$ dimensional space.
Bogenlänge ist, wenn $m_1 = m_2 = m_3$ ect

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dz_n}{ds}\right) = 1$$

Krümmung ist

$$\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y_1}{ds^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{d^2z_n}{ds^2}\right)^2 = k$$

Ein paar Beispiele

Atwoods Maschine

The machine gives the equations of condition, i.e. length of string is invariant

or $f(z, Z) = z + Z - 1 = 0$

Our Lag. equations are

$$\begin{cases} m z'' = mg + \lambda \cdot 1 \\ M Z'' = Mg + \lambda \cdot 1 \\ z + Z = 1 \end{cases}$$

But

$MZ'' = -Mz''$ because from $z'' = -Z''$

and we get

$$(m + M) z'' = (m - M) g$$

$$z'' = g\frac{(m - M)}{m + M},$$

$$Z'' = \frac{g(M - m)}{m + M}$$

We see that when m and M are nearly of same mass the accelleration is small, and when m and M are much different the accel. is large as was to be expected.

Beispiel

There are 3 mass points, take one as origin

m is free to move in xy plane
M " " " " on z axis.

Think of gravity acting between m and origin but not between M and m or origin

$Z = \sqrt{r} = \sqrt[4]{x^2+y^2}$

$f(xyz) \equiv \frac{1}{2}(z^4 - x^2 - y^2) = 0$

We can get the motion through a mechanism

right angle

$$\left.\begin{aligned} m x'' &= -\frac{m x}{r^3} - \lambda x \\ m y'' &= -\frac{m y}{r^3} \mp \lambda y \\ M Z'' &= 2 \lambda Z^3 \end{aligned}\right\} \text{ with } Z = \sqrt{r}$$

$$Z'' = (r^{\frac{1}{2}})'' = \left(\tfrac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} r'\right)' = \tfrac{1}{2}\left(r^{-\frac{1}{2}} r'' - \tfrac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} r'\right)$$

Solving third equation for λ

$$\lambda = \frac{M Z''}{2 Z^3} = \frac{M}{4 Z^3}\left(r^{-\frac{1}{2}} r'' - \tfrac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} r'^2\right)$$

and

$$m x'' = -\frac{m x}{r^3} - \frac{x M}{4 r^{\frac{3}{2}}}\left(r^{-\frac{1}{2}} r'' - \tfrac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} r'^2\right)$$

$$= -\frac{m x}{r^3}\left\{1 + \frac{M}{4m} r r'' \mp \frac{M}{8m} r'^2\right\}$$

Let $\frac{M}{8m} = \kappa^2$

$$m x'' = -\frac{m x}{r^3}\left\{1 + 2\kappa^2 r r'' - \kappa^2 r'^2\right\}$$

$$m y'' = -\frac{m y}{r^3}\left\{1 + 2\kappa r r'' - r^2 r'^2\right\}$$

Our point in the xy plane moves as if unaffected by M but according to the law expressed in the equations, which is same as the law of Weber in electricity

Inversely we can say that the law of Weber can be expressed by a mechanism and Newtons laws.

Beispiele – [illegible] condition

Think of point moving on st. line. Motion is given. Another point on which no forces acts moves in such a way that the direction of motion is always ⊥ to the line connecting the two points

Paragraph 13. Schwerpunkt satz and Flächen Satz.

We assume our force has a potential.

$$X_1 = \frac{\partial F(x, y, z, \dots x_n y_n z_n)}{\partial x_1}$$

$$Y_1 = \quad ''$$

$$Z_1 = \quad ''$$

ect

We assume that F depends only on the distances between points.

$\therefore F = F(r_{12}, r_{13}, r_{23} - - -)$

a special case of which we have seen when we had

$$F = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + - - - -$$

If $\begin{cases} X_1 = A_1 \\ Y_1 = B_1 \\ \text{ect} \end{cases}$ $F = A_1 x + B_1 y_1 + \cdots C_n z_n$

Suppose we have 3 points in a plane

$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$ says they are on a st. line. It is a condition dependent on distance only.

$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0$ says 4 points are in same plane.

$r_{13} r_{24} = r_{12} r_{34} + r_{14} r_{23}$ says 4 points are on a circle

Jan. 18.
(35) (36)

The condition that we impose on F, that it is to depend on distance between two points is called an "inner condition"

If we take our equations

$$m_i x_i'' = X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

and add them we get

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' + \cdots m_n x_n'' =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \mu\left(\frac{\partial g}{\partial x_1} + \cdots\right)$$

$$= 0$$

und auch

$$m_1 y_1'' + m_2 y_2'' + \cdots + m_n y_n'' = 0$$

$$m_1 z_1'' + m_2 z_2'' + \cdots + m_n z_n'' = 0$$

These equations are easily integrated

$$m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = \alpha_1 t + \alpha_2$$

$$m_1 y_1 + \cdots + m_n y_n = \beta_1 t + \beta_2$$

$$m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n = \gamma_1 t + \gamma_2$$

Now let

$$m_1 + \cdots + m_n = M$$

and

we call

$$\frac{m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + \cdots + m_n} = \xi$$

$$\frac{m_1 y_1 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + \cdots + m_n} = \eta$$

$$\frac{m_1 z_1 + \cdots + m_n z_n}{m_1 + \cdots + m_n} = \zeta$$

the Schwerpunkt and ξ, η, ζ its coordinates. We see that ξ, η, ζ are linear functions of t. Hence the center of gravity moves on a straight line with uniform velocity. If t comes explicitly into our conditional equations the same thing holds.

Beispiel.

$m_1 x_1'' = X_1$, gravity problem for two bodies.

Also the planetary system

If we fire a ball from a cannon, the ball and cannon are suddenly repeated, but

the center of gravity remains the same.

If in our original equations we have a constant force added say

$$m_1 x_1'' = X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} + A_1$$

ect.

then our equations become

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' + \text{---} = A_1 + \text{--} A_n \text{ instead of } 0$$

and our result is

$$m_1 x_1 + \text{--} + m_n x_n = \alpha_1 t + \alpha_2 + \tfrac{1}{2}(A_1 + \text{--})t^2$$

ect. which gives a parabolic motion of the center of gravity.

Many examples of the impossibility of getting a motion from rest by use of inner forces only or "inner conditions," are impossibility of motion on smooth ice, impossibility to lift ones self over a fence ect.

On a perfectly smooth sea a boat cannot be moved by a bellows blowing on the sails, but suppose we have a rough

m_1 m_2 x

Let $F = x_1 - x_2$ friction $= k$.

$$m_1 x_1'' = 1 - k x_1'$$

$$m_2 x_2'' = -1 - k x_2'$$

$t = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1' = 0,\ x_2' = 0$

$$x_1 = \frac{t}{k} + \frac{m_1}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m_1}} - 1\right) \quad \Big| \quad m_1$$

$$x_2 = -\frac{t}{k} - \frac{m_2}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m_2}} - 1\right) \quad \Big| \quad m_2$$

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left\{\frac{t}{k}(m_1 - m_2) + \frac{1}{k^2}\left[m_1^2\left(e^{-\frac{k}{m_1}t} - 1\right) - m_2^2\left(e^{-\frac{kt}{m_2}} - 1\right)\right]\right\}$$

and ξ changes with time but if $k = 0$ i.e. no friction exists, we see that the $\xi = \underline{\text{const}}$.

Wir kommen jetzt zu den <u>Flächensätze</u>.

Inser Lag. equations are

$$m_1 x'' = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}$$

- - - - - - - - - - - -

Now instead of adding these equations as before we combine them thus

mul.

$m_1 x_1'' = - - - - - -$ . . . with y_h y_1

and

$m_1 y'' = - - - - -$ with $-x_h$ $-x_1$

and form

$$\sum_{l,h} m_l \left(x_l'' y_h - y_l'' x_h \right)$$

$$= \sum_{h,l} \left(y_h \frac{\partial F}{\partial x_l} - x_h \frac{\partial F}{\partial y_l} \right)$$

$$+ \lambda \sum_{hl} y_h \left(\frac{\partial f}{\partial x_l} - x_h \frac{\partial f}{\partial y_l} \right) + \mu \sum_{hl}$$

Now if F depends on distance only the right hand side of this is zero, and we have

$$\sum_{l,h} m_l \left(x_l'' y_h - y_l'' x_h \right) = 0$$

Caution: Here we have a simple sum only; Take $h = l$ throughout

~~Differentiate~~ Integrate with respect to t.

$$\sum_{\mathfrak{l},\mathfrak{h}} m_{\mathfrak{l}}(x'_{\mathfrak{l}} y_{\mathfrak{h}} - y'_{\mathfrak{l}} x_{\mathfrak{h}}) = \cdot c$$

and in same way we get

$$\sum_{\mathfrak{l}} m_{\mathfrak{l}}(y'_{\mathfrak{l}} z_{\mathfrak{l}} - z'_{\mathfrak{l}} y_{\mathfrak{l}}) = \cdot a$$

$$\sum_{\mathfrak{l}} m_{\mathfrak{l}}(z'_{\mathfrak{l}} ~~x~~_{\mathfrak{l}} - x'_{\mathfrak{l}} z_{\mathfrak{l}}) = \cdot b$$

called Flächen-integral

z, $m_{\mathfrak{l}}$, y, x

Statt x und y nehmen $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$

r und ϑ are functions of t.

$$(x'y - xy') = (r'\cos\vartheta - r\sin\vartheta\,\vartheta')r\sin\vartheta$$
$$-(r'\sin\vartheta + r\cos\vartheta\,\vartheta')r\cos\vartheta$$
$$= -r^2\vartheta'$$

And out of this we get

$$\sum_{l} m_l r_l^2 \vartheta_l' = c$$

r is distance from the z axis.
So by "inner kraft" we have the above sum always const.
This is the Flächensatz for z axis

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sum_l m_l r_l^2 d\vartheta_l = c(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$ or statt ϑ handhen wir t = Zeit

is the surface of projection of r as it moves in space.

Jan. 22. (37) (38)

In a special case where we have the problem of two bodies the above becomes Keplers 2nd law of the motion of a body.
This Flächensatz leads to a discussion of Laplace's invariable plane as found in most text books.

Eine Folgerung
For times $t = t_1$, $t = t_2$
let there be no motion.

no rotation takes place.
For instance on smooth ice one can not turn.

It means

$$\sum m_e r_e^2 \vartheta_e' = 0$$

m and r² are positive

$$\vartheta_e' = 0$$

Denken sie uns eine Scheibe.

M

It rotates horizontally by an insect m walking on it. If it moves in a closed curve m and M have same relative position but the Scheibe has moved.

A falling cat always alights on its feet. The fact that it can do this seems to be contradictory to our ideas of mech. but the explanation is same as for the Scheibe problem when the insect goes in a closed curve.

Above we have assumed that F the force function depended on distance only.

Now we assume F as function

$$F(r_{hk},\ x_h^2+y_h^2,\ z_h)$$

$x_h^2+y_h^2$ gives the distance from z axis.

Here the Flächensatz holds, but only for the z axis.

Paragraph. 14.

Erhaltung der Energy.

The Schwerpunkt satz gave us 6 integrals

" Flächensatz " " 3 "

We have then 9 integrals. We will get a tenth.

Take our Lag. gl.

$$m_1 x_1'' = X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

\- - - - - - - -

We assume a force function to exist and that t does not occur explicitly in our conditions.

To get our 10th integral
mul. first Lag. gl. with x_1', second
by x_2' etc. Then add and get

$$m_1 \sum x_h' x_h'' = \sum x_h' \frac{\partial F}{\partial x_h} + \lambda \sum x_h' \frac{\partial f}{\partial x_h} + \mu \sum x_h' \frac{\partial g}{\partial x_h}$$

and like equations for y and z which
we may add together and get one equation
but the last 2 terms are 0
and we get

$$m \sum \left(x_h' x_h'' + y_h' y_h'' + z_h' z_h'' \right) = \sum \left(x_h' \frac{\partial F}{\partial x_h} + y_h' \frac{\partial F}{\partial y_h} + z_h' \frac{\partial F}{\partial z_h} \right)$$

or

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} \sum m_h \left(x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2 \right)\right)}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

or $\frac{dT}{dt} = \frac{dF}{dt}$ $\quad F = -U$, gegeben.

U ist potential Energy.

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0$$

$$\underline{\underline{T + U = E}}$$

E is independent of time

Ist es möglich mehr Integral zu bekommen!

Nein. Shown by Poincaré, for $n = 3$, as follows

Let

$$f(x_1 \dots z_3\ x_1' \dots z_3'\ t) = \text{const.}$$

be "eindeutig".

Jan. 25
(39) (40)

Arbeit $= A_{12} = \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1 = -\int_1^2 \left(X_h \frac{dx_h}{dt} + Y_h \frac{dy_h}{dt} + Z_h \frac{dz_h}{dt}\right) dt$

and is independent of path.

If $\mathcal{U}$ = Const. we have a Niveau fläche

z. b. smooth ice is almost a " " for gravity.

Hamilton's Principle

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - \mathcal{U})\, dt = \text{min}$$

Die Bewegung findet so statt dass

We have a variations problem for T and $\mathcal{U}$ are given. There are $3n$ dependent variables

$x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t)$ - - - - - -

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T - \mathcal{U}}{\partial x_h'}\right) - \frac{\partial (T - \mathcal{U})}{\partial x_h} = 0$$

- - - - - - - - - .

- - - - - - - - .

These equations are identical with the Lagrangian equations. We need only to substitute for T and $\mathcal{U}$ their values

and get

$$m_h x_h'' + \frac{\partial U}{\partial x_h} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_h} = 0$$

— — — — — — — —

Hamiltons principle is nothing more than the variations problem whose differential equations are Lagrangian equations

Euler-Maupertuissche princip

$$\int_{t_1}^{t} T\,dt = \text{Min. while } T + U = E$$

Jacobische Princip. instead of t use $s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{T}\,dt = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\tfrac{1}{2}(- - - -)}\,dt$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{T}$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \sqrt{F}\,ds = \text{Min} \qquad F = E - U$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum m_h \left(x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2\right)$$

The advantage of these principles is their simplicity.

Take Hamilton's Principle

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = \min$$

$$T = \sum \tfrac{1}{2} m_h (x_h'^2 + \cdots \quad)$$

$$U = U(x_h y_h z_h)$$

$$f = 0$$

$$x_h = x_h(p_1 \cdots p_r) \qquad x_h' = \frac{\partial x_h}{p_1} p_1' + \cdots$$

$$y_h = y_h(p_1 \cdots p_r)$$

$$z_h = z_h(\qquad)$$

$T = T(p_1' \cdots p_r')$ = homo. quad. form.

r = degree of freedom.

$$U = U(p_1 \cdots p_r)$$

Set $H = T - U = H(p_1' \cdots p_r', p_1 \cdots p_r)$

$\int_{t_1}^{t_2} H\, dt = \min$ without nebenbedingung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1'}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_1} = 0$$

$$- - - - - - - -$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_r'}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_r} = 0$$

Out of these equations we get 2r constants

With conditional equations we use $H+\lambda f$ etc.

Par. 15 Method der Variationsrechnung

$$\int_a^b F(y'y)\,dx \quad = \text{min.}$$ In mechanics x = Zeit.

This is simplest problem.

First variation must = 0 or

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

When one has a dif. eq. $G(y'', y, x) = 0$ and knows it springs out of a variation problem it is a great advantage in its integration

There is a close connection with the theory of par. dif. eq. 1st order.

$$I = \int_a^b \left\{ F + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) F_p \right\} dx$$

Study this integral in the xy plane

It has the form $\int_a^a \{A + y'B\} dx$

If $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ the $\int$ is independent of the path. This is a par. dif. eq.

Take from the 2 par. schar of solutions of the Lag. equations a 1 par. schar. Call $p = y'$ and get p feld. Satisfies the par. dif. eq.

Jan. 29. (41), (42)

One generalisation is to have two dependent variables.

$$\int_1^2 F(y', z', y, z, x) dx = \text{min}.$$

We get 2 Lagrangian equations.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

We can write our integral

$$j(x) = \int_1^x F dx$$

and we have then 3 functions to discuss

i.e. $j' = F(z'y'zyx)$ ~~and the 2 Lag. eq~~
and y', z', or $j(x)$, $y(x)$, $z(x)$

That is we study the unterbestimmte system $j' = F$ with 3 functions.

This is somewhat analogous to ordinary functions. We take

$$j = \varphi(y)$$

and ask when j is a maximum

A necessary condition is $\frac{dj}{dy} = 0$

which is analogous to our Lag. equations solve for y and at this point we have two values which are same. Sie ist eine Verzweigungsstelle.

In Variationsrechnung we have functions of functions instead of functions of quantities. Such an unterbestimmte equation between functions is

$$j' = F(y', y, x)$$

Instead of Verzweigungspunkten we have Verzweigungsgebilden. Above $\frac{dj}{dy} = 0$ gave us a finite no of points, here the Variationsableitungen gives us a finite no of curves.

We can also think of a problem connected with $j' = F(\ \ )$ analogous to the problem of "Uniformisierung" of $g(yx) = 0$ that is getting eindeutig functions $x = x(t)$, $y = y(t)$ which are equivalent to ↑

Wir wollen nun zusehen, wie man bei der Behandlung der Variationsproblem auf natürlichem Wege auf den Unabhängigkeitssatz geführt wird. Wie in der differentialrechnung es eine der ersten Fragen ist, unter welchen Umständen die Ableitung $\frac{dj}{dy}$ identisch verschwindet, die im allgemeinen nur an endlich vielen Stellen des Max. und Min. verschwindet, so wird es hier auch naheliegen, zu untersuchen, wann die Variationsableitungen eines Integrals identisch verschwinden can.

Our Lag. Curves give us a 4 par. ~~system~~ of curves in space.

In calculus if $\frac{dy}{dx} = 0$ for all values of x then $y = \text{const}$.

Suppose our Lag. equations are identically 0. Expanding our equations by differentiating we get $y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + - - - - = 0$

$$F = A(y, z, x) + By' + Cz'$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} y' + \frac{\partial B}{\partial z} z' + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} y' - \frac{\partial C}{\partial y} z' = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}$$

Then if our Lag. equations are identically $= 0$ then F must have above form. where the A, B, C are related as shown.

$$B = \frac{\partial \Phi(x, y z)}{\partial y}, \quad A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$C = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad A = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$\Phi = \Psi + \varphi(y,z)$$

$$C = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Then substituting in our expression for F

$$F = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' - \frac{\partial \varphi}{\partial z} z'$$

$$I = \int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} F\,dx = \Phi(xyz) - \Phi(x_1 y_1 z_1) - \int_{x_1 y_1 z_1}^{xyz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz$$

To sum up, if we have

$$I = \int_1^{xyz} F(x\,y\,z\,y'z')\,dx \qquad = I(x,y,z)$$

and $F = A + By' + Cz'$

and through pt. 1 we have a surface $T=0$, then the conditions that our integral is independent of path when taken along any curve in this surface are $A = \frac{\partial I}{\partial x}$, $B = \frac{\partial I}{\partial y}$, $C = \frac{\partial I}{\partial z}$.

This discussion is analogous to the case in calculus. $f(x)$, with $\frac{df}{dx} = 0$

Given a variations problem, how can we get an equivalent problem.

Say, given.

$$\int_1^2 F(y' z' y z x)\,dx = \min.$$

Instead of y' take p, z' take q.

and an equivalent problem is.

$$\int_1^2 F(p q y z x) = \min.$$

$\left.\begin{matrix} p = y' \\ q = z' \end{matrix}\right\}$ ~~mit~~ nebenbedingung

Use Lag. multiplicator method.

$$F + \lambda(y' - p) + \mu(z' - q) \equiv F^*$$

From $\int F^* dx$ we get

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial F^*}{\partial p} &= 0 \\ -\frac{\partial F^*}{\partial q} &= 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y'} - \frac{\partial F^*}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial z'} - \frac{\partial F^*}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &= F_p - \lambda = 0 \\ &= F_q - \mu = 0 \end{aligned}$$

Now substituting we have

$$\int_1^2 \left\{ F(p,q) + F_p(y'-p) + F_q(z'-q) \right\} dx = \text{Min}$$

which is equivalent with our first.

$$\cancel{F_p} - \cancel{F_p} + F_{pp}(y'-p) + F_{pq}(z'-q) = 0$$

$$\cancel{F_q} - \cancel{F_q} + F_{pq}(y'-p) + F_{qq}(z'-q) = 0$$

so we must always assume

$$F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 \neq 0$$

We now ask how to determine p and q as functions of $(x\,y\,z)$ in order that the integral is independent of the path.

To answer this, —
Take a surface $T = 0$ in space, so that integral taken in it is independent of path. p and q are distinct on surface.

Through each point on surface construct a curve which is a solution of our original Lag. equation, and for which $y' = p$, $z' = q$. We get a 2 paramet.

of curves in space. Let p and q be the values of y', z' on these curves. These values of p and q are the values which make our integral independent of the path.

Out of the "Unabhängigkeitssatz" we easily get Weierstrass's E function.

Lag. $\bar{y}, \bar{z}$

2

1

Take a Lag. curve between 1 and 2. Also <u>any</u> other curve.

Let a p, q field surround the curves.

Along the arbitrary curve take

$$\int_1^2 \left(F(p,q) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q\right) dx$$

$$= \int_1^2 F(\bar{y}', \bar{z}')\, dx$$

Subtract from both sides

$$\int_1^2 F(y' z')\, dx$$

and get $\int_1^2 E\, dx = \int_1^2 F(\bar{y}' \bar{z}')dx - \int_1^2 F(y' z')dx$

where $E = F(p,q) - F(y', z') + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q$.

and this must be <u>positive</u>

Feb. 1. (43.) (44.) Was bedeutet es wenn unser Lag. Gl. identisch = 0, ?

Then is an Integral

$$I(yz) = \int_{x_1}^{x} F\,dx$$

independent of the F

and we have the analogy to the case when the derivative of a function is 0 for all values – that is the function is a const.

Wir haben a Variationsproblem in

$$\int \left\{ F + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q \right\} dx = \min$$

$F = F(p, q\ y z x)$ $\quad p = y',\ q = z'$

Wir fragen wie kann man p und q als fct. von $x y z$ bestimmen so dass eine Orts fct. ist.

Nehmen Fläche $T = 0$.

Think of p and q as on surface, at a point construct a curve so that $y' = p$,
$z' = q$

Thus we get the Unab. Satz.

To return to the original problem

$$\int F dx = \min.$$

A B

Ist A B wirklich minimal Curve.

Draw any other Curve and compare the two.

Through A take a surface $T = 0$, which may in special cases a point.

Construct schar of Lag. curves about A B and in usual way get the E function and the Weierstrass Kriterium. For weak variations this Kriterium becomes the Legendresche Krit.

$$F(y', z') = F(p, q) + \frac{y' - p}{1!} F_p + \frac{z' - q}{1!} F_q$$
$$+ \frac{(y' - p)^2}{2!} F_{pp} + \frac{(y' - p)(z' - q)}{} F_{pq} + \frac{(z' - q)^2}{2!} F_{qq} \cdots$$

and E becomes

$$\tfrac{1}{2}\left\{(y'-p)^2 F_{pp} + 2(y'-p)(z'-q) F_{pq} + (z'-q)^2 F_{qq}\right\} > 0$$

or $$\left.\begin{array}{l} F_{pp} > 0 \\ F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0 \end{array}\right\}$$

If $F = \sqrt{1+y'^2+z'^2}$, (it is easy to apply)

Suppose we have a surface $T=0$ through A. Choose an arbitrary $T=0$. Now find p and q on this surface.

$$F - pF_p - qF_q : F_p : F_q = \frac{\partial T}{\partial x} : \frac{\partial T}{\partial y} : \frac{\partial T}{\partial z}$$

on the surface, if 1 and 2 both lie on $T=0$

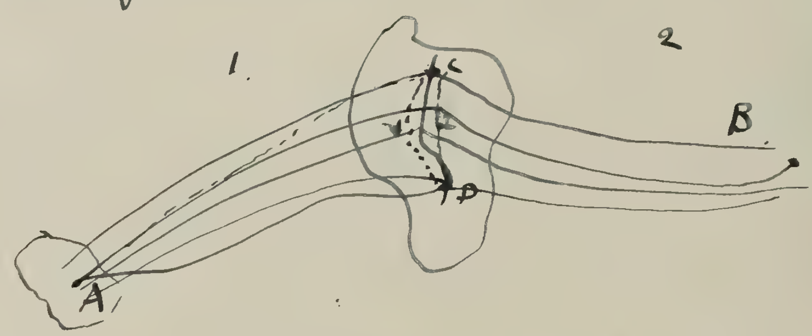
$$\int_1^2 M\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x}y' + \frac{\partial T}{\partial z}z'\right)dx$$

is always 0. A given $T=0$ fixes p and q on the surface. Surround A B with a scheme as before except that here the curves do not ~~necessarily~~ go through a

point. If A^* is another point on $T=0$ then $\int_{A^*}^{A} = 0$ and we get E fct. as before.

Thus we get our problem changed to a problem of minimum of $\int_{\Phi(x)}^{2}$ from a given surface to given pt.

<u>Case of discontinuity.</u>



Two domains seperated by $T=0$, 1 and 2

construct a surface through A and construct a schar about A.

Take C and D on trennungsfläche

$$\int_A^C + \int_C^B = \int_A^D + \int_D^B.$$

$$\int_A^C + \int_{(1)} = \int_A^D, \quad \int_2 + \int_D^B = \int_C^B$$

Combine and get

$$\int_1 = \int_2$$

$$F(p_1 q_1) + (y'-p_1) F_{p_1} + (z'-q_1) F_{q_1}$$

$$= F(p_2 q_2) + (y'-p_2) F_{p_2} + (z'-q_2) F_{q_2}$$

which is true on the Trennungsfläche and p_2 and q_2 are the unknowns.

If $U=0$ is Trennungsfläche

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' = 0$$

The correct min. Curve is that which in passing the surface with direction $p_2\, q_2$ passes through B.

Jacobi.- Hamilton Princip.

Call our Ortsfunction $I(xyz) = \int^{xy}$ etc.

$T=0$ given.

$$I(xyz) = \int_{T=0}^{xyz} \left(F + (y'-p) F_p + (z'-q) F_q\right) dx$$

Since F and T are given I is a fixed fct.

$$\frac{\partial I}{\partial x} = F - pF_p - qF_q$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = F_p$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = F_q$$

Eliminate p and q

$$\Phi\left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\right) = 0$$

Let $T = 0$ have two parameters.

$$T(xyzab) = 0$$

Then we have $I = I(xyzab)$

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_{T=0}^{xyz} \left(F_p \frac{\partial p}{\partial a} + F_q \frac{\partial q}{da}\right) + (y'-p)\left\{F_{pp}\frac{\partial p}{\partial a} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial a}\right\} - p_a F_p - q_a F_q$$

$$+ (z'-q)\left(F_{qp}\frac{\partial p}{\partial a} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial a}\right) dx$$

$\frac{\partial I}{\partial a}$ = const. when taken on a Trans. Curve.

$\frac{\partial I}{\partial b}$ = " " " " " "

And so on as given in Hilberts lectures on variations rechnung.

We take up the change of a Var. prob. from one form to another. Feb. 5. (45)(46)

If we have given

$$\int_A^B F\,dx = \text{Min}$$

We seek $p\,q\,y\,z$ so that

$$\int_A^B \left\{ F(p,q\,y\,z:x) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q \right\} dx = \text{Min}$$

Wir machen eine Art von Leg. Trans.

$\{\cdots\}$ is a linear expression.

$$\underbrace{F - pF_p - qF_q} + y'F_p + z'F_q$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \qquad \frac{\partial I}{\partial y} = \qquad \frac{\partial I}{\partial z} =$$

Let $\pi = F_p(p,q)$

$K = F_q(p\,q)$

We get p and q as fcts. of π, K.

Substitute in

$$\frac{\partial I}{\partial x} = H\left(\frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\, y\, z\, x\right)$$

and an Variat.-prob. ist

$$\int \left\{ H(\pi\, \kappa\, y\, z\, x) + y'\pi + z'\kappa \right\} dx$$

or $$\int_A^B \left\{ \pi y' + \kappa z' + H(\pi\, \kappa\, y\, z\, x) \right\} dx = \text{min}$$

π, κ, y, z sind vier gesuchte Fct.

Für diese Problem unser Lag. gl.

sind
$$y' + \frac{\partial H}{\partial \pi} = 0$$
$$z' + \frac{\partial H}{\partial \kappa} = 0$$
$$\pi' - \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$
$$\kappa' - \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

or $$y' = -\frac{\partial H}{\partial \pi} \qquad \pi' = \frac{\partial H}{\partial y}$$
$$z' = -\frac{\partial H}{\partial \kappa} \qquad \kappa' = \frac{\partial H}{\partial z}$$

Notice the simple form of the Lag.

equations after the transformation. This form of the Lag. eq. is called the <u>Canonische</u> <u>Form</u>.

Here in this transformation we have not changed y or z. Let us transform all 4 in the problem of form

$$\int_A^B \left\{ \pi y' + \kappa z' + H \right\} dx = \text{min}.$$

Wie kann man bestimmen

$\Pi = \Pi(\pi \kappa, y z x)$

$K = K(- \; -)$ so dass wir

$Y = Y(- \; -)$ eine aequivalent

$Z = Z(\quad)$ Var. prob. haben.

Wir wollen nicht fragen über eine einzige Transf. but über eine Schar von Transf. That is our transformation will contain a parameter α and for all α's our Var. prob. is changed into an equiv.

Für $\alpha = \alpha_1$ bekommen wir eine bestimmte Trans. auch für α_2.
When we use both we have same effect as for a_3 say, that is the group idea comes in here.

We can solve

$\pi = \pi(\Pi, K\,Y\,Z)$

$k = k(\ -\ -\ -\ )$

$y = y(\ -\ -\ -\ )$

$z = z(\ -\ -\ -\ )$ = fct of (Π, Z)

Let $\pi = \Pi + \alpha \mathfrak{y}(\Pi, Z) + \alpha^2(\ )$

$k = K + \alpha \mathfrak{y}(\ -\ -\ ) + \alpha^2(\ )$

$y = Y + \ -\ - \mathfrak{y}(\ )$

$z = Z + \ -\ - \mathfrak{z}(\ )$

The four functions of Π, Z which are coefficients of α are the <u>erzeugende Fct</u>.

or $Xf = \mathfrak{y}\frac{\partial f}{\partial \Pi} + \mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial K} + \mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial Y} + \mathfrak{z}\frac{\partial}{\partial Z}$

= symbol of an operation

$$\left.\begin{array}{l} \pi = \pi(\Pi \cdots \Xi\,\alpha) \\ k = k(- \quad -\,-\,\alpha) \\ y = y(\qquad) \\ z = z(\qquad) \end{array}\right\} T_\alpha$$

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}.$$

Bilden wir.

$$f + \alpha \frac{Xf}{1!} + \alpha^2 \frac{XXf}{2!} + \alpha^3 \frac{XXXf}{3!} + \cdots = [f]$$

$$\pi = [\Pi], \quad k = [K], \quad y = [Y] \quad z = [Z].$$

$$\mathfrak{y}(\Pi - Z). \qquad \mathfrak{y}(\Pi - - Z)$$
$$\mathfrak{y}(\Pi - - Z). \qquad \mathfrak{z}(- - -)$$

$$\mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial \Pi} + \mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial K} + \mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial Y} + \mathfrak{z}\frac{\partial}{\partial Z} = X.$$

1.) $\pi = [\Pi] = \Pi + \alpha\, \mathfrak{y}(\Pi \cdots Z) + \alpha^2$

$k = - - - -$

$y = - - -$

$z = - - - —$

2.) $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = Xf.$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \varphi \frac{\partial f}{\partial \pi} + \psi \frac{\partial f}{\partial \kappa} + \chi \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\alpha = 0 \quad f = \pi$

3.)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} &= \varphi(\pi \kappa y z) \\ \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} &= \psi(- - -) \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} &= \chi(- -) \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} &= \zeta(- -) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \pi &= \pi(\alpha, c_1 - - c_4) \\ \kappa &= \kappa(\alpha - - -) \\ y &= y(\quad) \\ z &= z(\quad) \end{aligned}$$

$c_1 - - - c_4$ to be determined so that

$c_1 = \Pi, \; c_2 = K, \; c_3 = Y, \; c_4 = Z.$

For parameters α and β.

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$$

$Xf = 0$ is nec. and suf. condition for invariance of group.

Wir wollen nun dies an unser Var.-problem brauchen.

$$\int_A^B \pi y' + \kappa z' + H(\pi, \kappa\, y\, z)\, dx = \text{Min}$$

We find a group of Trans. so that this is changed into an equivalent problem.

The following equation must be satisfied

$$\pi y' + k z' = \Pi Y' + K Z' + A'$$

$$(\Pi + \alpha\, y(\pi \cdots z) + \cdots)(Y' + \alpha\, \eta')$$

$$+ (K + \alpha k)(Z' + \alpha \zeta')$$

$$y Y' + \Pi \eta' + k Z' + K \zeta' = A'$$

$$y + \pi \frac{\partial \eta}{\partial y} + \kappa \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$k + \pi \frac{\partial \eta}{\partial z} + \kappa \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\pi \frac{\partial \eta}{\partial \pi} + \kappa \frac{\partial \zeta}{\partial \pi} = \frac{\partial A}{\partial \pi}$$

$$\pi \frac{\partial \eta}{\partial \kappa} + \kappa \frac{\partial z}{\partial \kappa} = \frac{\partial A}{\partial \kappa}$$

Diese Gleichungen geben über in

$$\mathfrak{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$k = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\mathfrak{y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \pi}$$

$$\mathfrak{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}$$

Hier ist

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \pi} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \pi}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}}$$

$Xf = (\varphi, f)$ a function which changes sign if φ and f are interchanged

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = (\varphi, f)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \pi}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \kappa}$$

which is the Canonical form.

and our Variationsproblem is

$$\int_A^B \{\pi y' + \kappa z' + \varphi(\kappa\, \pi\, y\, z)\} \cdot dz$$

Can we get a transformation where the $H(\pi K\, y z)$ is unchanged.

Invariance is characterized by $Xf = 0$

Φ, must be so chosen that $(\Phi, H) = 0$

Let $y' = -\frac{\partial H}{\partial \pi}$, $z' = -\frac{\partial H}{\partial k}$

$\pi' = \frac{\partial H}{\partial y}$, $K' = \frac{\partial H}{\partial z}$

then is $(\Phi, H) = 0$. or $\Phi = \text{Const}$

And thus we get a infinitesimal group of transformations which leaves unchanged our variations problem.

Feb. 8
(47), (48)

Unser Problem war, 4 functionen zu finden so dass

$$\int_A^B \left\{ \pi y' + K z' + H(\pi, K, y\, z) \right\} dx = \text{Min}.$$

Wir hatten 4 neue Functionen eingeführt

Π, K, Y, Z

$$\pi = \pi(\Pi, K, Y\, Z)$$
$$k = k(\qquad\qquad)$$

\- - - -

\- - -

i.e.

$\pi = \Pi + \alpha\, y(\quad)$

– – – – – –

– – – – – –

Wenn man die 4 funktionen die coefficienten
[illegible] ~~von α~~ gegeben hat, dann hat er
eine ein. par. schar

$$y = \frac{\partial \Phi(\Pi, K\, Y\, Z)}{\partial Y}$$

$$k = \frac{\partial \Phi}{\partial Z}$$

$$y = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Pi}$$

$$z = -\frac{\partial \Phi}{\partial K}$$

But we want a transformation which
leaves our function under the $\int$ in our
var. problem unchanged

The condition is

$$XH = 0$$

wo $\quad X = y\frac{\partial}{\partial \Pi} + \text{– – –}$

Let

$$(u,v) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \pi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial \kappa} - \frac{\partial u}{\partial \pi}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \kappa}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= -(v,u)$$

$$(\varphi, H) = 0$$

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$z' = -\frac{\partial H}{\partial \kappa}$$

$$\pi' = \frac{\partial H}{\partial y} \qquad \varphi(H \kappa y z) = \text{const}$$

$$\kappa' = \frac{\partial H}{\partial z}$$

Now think of a second transformation

$$(\psi, H) = 0$$

Here we get parameter β, instead of α and instead of operation X we have Y

$XY - YX$ is also an operation to this we will see that the transformation (Φ, ψ) belongs. ad $(\varphi, \psi) = \text{const.}$

and $((\varphi, \psi), H) = 0$

Take the identity (Jacobi's)

$$((u,v),w)+((v,w),u)+((w,u)v)=0$$

To show this is = 0

Let $(v,u)=X(u)$

where

$$Xf = a_1\frac{\partial}{\partial \pi} + a_2\frac{\partial}{\partial \kappa} + a_3\frac{\partial}{\partial y} + a_4\frac{\partial}{\partial z}$$

$$Yf = b_1\frac{\partial}{\partial \pi} + \text{-------}$$

$$(w,u) = Y(u)$$

$$((u,v)w)+((w,u)v) = YX(u) - XY_u$$

Now let $u = H$

$v = \Phi$

$w = \Psi$

$$((v,w),u)=0$$

$$((\Phi,\Psi)\ H)=0$$

To go back, – we began with

$$\int_A^B F(y',z',y\,z)\,dx = \text{min} \quad x \text{ not explicit}$$

We went over to the problem.

$$\int_A^B F(p,q) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q\Big\}\,dx = \text{min}$$

now make the Leg. Trans.

$$F_p = \pi$$

$$F_q = \kappa$$

Do the values p, q, y, z, really make our $\int$ a min?

Draw a curve in our 5 dimen. space.

$x_2 y_2 z_2$

$x_1 y_1 z_1$

What p and q make our $\int$ a max.

Now get the min. of these max.

and $H = F - pF_p - qF_q$

our problem is

$$\int \left\{ \pi y' + \kappa z' + H \right\} dx = \text{max of min.}$$

$p = H_\pi$ $\qquad F = H - \pi H_\pi - \kappa H_\kappa$

$q = H_\kappa$,

x being assumed as not occurring explicitly then $H = \text{const}$ is an int of our eq.

and $I = h(x) + i(y, z)$

$$h = H\left(\frac{\partial i}{\partial y}, \frac{\partial i}{\partial z}, y, z\right).$$

Suppose we want a group of Trans.
but only a single Trans.
We want the most gen. Trans which
puts our Prob. in the canon. form.
We seek $\pi = \pi(\Pi, K\, Y\, Z)$

$k = - \quad - \quad -$
$y = - \quad - \quad -$
$z = - \quad - \quad -$

so to find that the Trans leaves our Prob.
unchanged

$$\int\{\Pi Y' - K Z' + H(\quad)\}\, dx$$

$$\Pi y' + k z' - \Pi Y' + K Z' = A' \text{ must}$$

be identically true in $\Pi K Y Z$
Now chose instead of ↗
y, z, Y, Z
and A is so determined that above is still
an identity in

$$\pi = \frac{\partial A}{\partial y} \qquad \kappa = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\Pi = -\frac{\partial A}{\partial Y} \qquad K = -\frac{\partial A}{\partial Z}$$

out of the last two express
y, z in terms of other variables
and thus we get the general "berührungs"
trans.

Now take another stand point
Take problem where one function does
not occur, say y

$$\int F(y'z'z)\,dx$$

Our Lag eq. becomes

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \text{ or } \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Take it equal to h.

Feb. 12
(49) (50)

Unser ursprüngliche Problem war

$$\int_A^B F(y'z'yz)\,dx = \text{min}$$

$$\pi = F_p$$

$$\kappa = F_q$$

$$H = F - pF_p - qF_q$$

$$\int_A^B (y'\pi + z'\kappa + H)\,dx = \text{max. min}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y &= 0 \\ \frac{d}{dx}(F_{z'}) - F_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

We have already discussed the above,
now suppose z does not occur
then $F_{z'} = c$

Ist ~~es~~ es möglich a var. prob. zu
becommen mit

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y = 0$$

$$F_{z'} = c$$

für Lag. Gleichungen?
Wir sagen Ja. Es ist lächerlich einfach!
Unser problem ist

$$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \left(F(y'z'y) - c z'\right) dx = \text{min.} \quad F_{z'} = c$$

So this has a three par. schar of solutions

An equivalent problem to the above problem

$$\int \left(F - c z' + \lambda(F_{z'} - c)\right)$$

~~order~~

Solve $F_{z'} = c$ for z', $z' = f(y', y)$

and get

$$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} (F - c z')_{z' = f(y'z)} \, dz = \text{min} \text{ which is}$$

still another form.

$$\text{In unser } \int_A^B \{ y'\pi + z'\kappa + H(\;) \} dx = \text{max. min}$$

$$y' = -H_\pi$$
$$z' = -H_\kappa$$
$$\pi' = H_y$$
$$\kappa' = H_z$$

aber wir haben kein z, so $\kappa = c$

H becomes $h = h(\pi, y)$

$$y' = -h_\pi$$
$$\pi' = h_y$$

$$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \{ y'\pi - h(\pi y) \} dx$$

To generalize, suppose we ~~know only~~ have

$$\int_A^B F(y' z' y z)\, dx = \text{min}$$

Is it possible to reduce the problem to a plane problem, or in the canonical form

$$y' = -H_\pi$$

can we drop out — $z' =$, $\pi' =$, $\kappa' =$ $G(\pi \kappa y z) = g$

By a transformation we get

$$\int_A^B \{ Y'\Pi + Z'K + H) dx = \text{min}$$

or $K = G(\pi \kappa y z)$ $Y' = -H_\pi$
$K' = H_z$

And we get a new equivalent problem.

$$\int_1^2 \{ Y' \Pi - H(\Pi, g, Y) \} dx$$

Das ursprüng. Prob. war

$$\int_1^2 (\pi y' + \kappa z' + H)\, dx = \text{max. min}$$

und $K = G(\pi\, \kappa\, y\, z)$ bekannt ist.

$\Pi =$

$Y =$

$Z =$

Man wählt $A(y\, z\, Y\, Z)$

$$\pi = \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\kappa = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\Pi = -\frac{\partial A}{\partial Y}$$

$$K = -\frac{\partial A}{\partial Z}$$

$y, z = \text{fct.}\ Y Z\ \Pi K$

$$-\frac{\partial A}{\partial z} = G\left(\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, y\, z\right)$$

That is A must satisfy the condition

und wir bekommen

$$\int_1^2 \left\{\Pi Y' + H(\Pi Y)\right\} dx$$

$$H(\Pi, Y) = H(\Pi, \kappa, y\, z)$$

$$= H\left(\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, y, z\right)$$

$$\Pi + \frac{\partial A}{\partial Y} = 0$$

$$G\left(\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial x}, y, z\right) = g$$

Simplest form for A is $g \cdot Y$.

und unser neue Var. Prob ist.

$$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \left\{-g Y' + H(Y, 0, y, (Y, H)\right\} dx = \text{max. min}$$

Wir haben gezeigt daß wenn z kommt nicht vor in $\int_1^2 F\,dx = \text{min}$.

wir können brauchen das neue Problem.

$$\int_1^2 (F - c z')\,dx = \text{min}$$

We will use this in Mechanics.

Hamilton. Princip ist

$$\int (T - U)\,dt.$$

$x_h\, y_h\, z_h$ = coord. eines Punkt.

$$T = \frac{1}{2} \sum m_h \left\{ \left(\frac{dx_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_h}{dt}\right)^2 \right\}$$

U = pot. energy.

$p_1 \cdots p_r$ = parameter.

Lag. fct. $= L = T - U = L\left(\frac{dp_1}{dt}, \cdots \frac{dp_r}{dt}\right)$ [$p_1 \cdots p_r$]

L ist unser F.

t does not come explicitly.

Let $t = t(\tau)$
and T changes to T^*

and $\int_{x_h' y_h' z_h' t_h'}^{x_h'' y_h'' z_h'' t_h''} (T - U)\, dt$ becomes

$$\int_{\tau^{(1)} A, t^{(1)}}^{\tau^{(2)} B, t^{(2)}} \left\{ T^*(p_1' - - - p_r') \frac{1}{t'^2} - U \right\} t'\, dt.$$

$$= \int_{\tau^{(1)}\, t^{(1)}}^{\tau^{(2)}\, t^{(2)}} \left(T^*(p') \frac{1}{t'} - U t' \right) dt = \text{min}$$

and this is the Ham. princip

Let $- T^*_{(p')} \frac{1}{t'^2} - U = - \mathcal{E} \equiv$ const

$$\int_{\tau^{(1)}}^{\tau^{2}} \left\{ T^* \frac{1}{t'} - U t' + \mathcal{E} t' \right\} dt = \text{min}$$

und this is a new principle

or $\int_A^B (T - U + \mathcal{E})\, dt = \text{min}$

A B

d. h. Die Bewegung findet so statt dass die $\int$ ein min ist

This principle lies between the Ham.

ilton and Maupertius principles

We can change our $\int$ to

$$\int_A^B (T-U)\,dt + \mathcal{E}(t_2-t_1)$$

From now on we will discuss the application of Var. Rech. on Mech. Feb. 14 (51) (52)

Par. 15.

$$\int_A^B F\,dx = \text{Min.}$$ wo z kommt nicht vor.

Aus dies kommt neue Princip.

Wir lassen $L = T-U$ und $x = t$.

Kordinaten unser n punkte $= x_h(t),\ y_h(t)\ z_h(t)$ $h = 1 \sim n$

$$\int_A^B (T-U+\mathcal{E})\,dt = \text{Min}$$

Wir mussen T und U kennen

$T+U = \mathcal{E}$

Unser neue Princip: Die Beweg. findet so statt dass dies $\int_A^B$ absolut Min. ist.

oder wir können schreiben

$$\int_A^B (T-U)\,dt + \mathcal{E}(t_2-t_1) = \text{min}$$

Aus diesem princip folgt Hamiltons prin.

$$\int_{A(t_1)}^{B(t_2)} (T - U)\, dt = \text{Min.}$$

und wenn zeitdauer nicht gegeben ist

$$\int_A^B T\, dt = \text{Min} =$$

Euler-Maupert princip.

Nun können wir Jacobi-Princip bekommen

$$T = T\left(\frac{dp_1}{dt} \cdots \frac{dp_r}{dt}, p_1 \cdots p_r\right)$$

$$T = T(p_1' \cdots p_r'\; p_1 \cdots p_r)\,\frac{1}{t'^2}$$

$$\frac{1}{t'^2} T = E - U$$

$$t' = \sqrt{\frac{T}{E - U}}$$

und für Jac. Princip bekommen wir

$$\int_A^B \sqrt{T(E-U)}\, dt = \text{Min.}$$

now let $\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{T}$

$$\int_A^B \sqrt{E - U}\, ds = \text{Min}$$ where time does not occurs.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = T\left(\frac{dp_1}{dt} \cdots \frac{dp_r}{dt}, p_1 \cdots p_r\right)$$

Dann machen

$$T\left(\frac{dp_1}{ds} \cdots \frac{dp_r}{ds}\; p_1 \cdots p_r\right) = 1$$

für Nebenbedingung.

Par. 16. Anwendung auf die Integrations Theorie der Gleich. in Mechanik

$$\int_A^B F(y', z' y z)\,dx = \text{min}.$$

$$\int_A^B \left\{y'\pi + z'\kappa + H(\pi, \kappa\, y\, z)\right\} dx = \text{max. min.}$$

wo $\pi = F_{y'}$, $\kappa = F_{z'}$

$H = F - y' F_{y'} + z_1 F_{z'}$

$$\pi' = \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\kappa' = \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$z' = -\frac{\partial H}{\partial \kappa}$$

$\pi = \pi(\Pi, K\, Y\, Z\alpha)$

— — — — —

$z = z(\Pi \cdots Z\,\alpha)$.

If our trans. leaves the $\int$ unchanged then H and Φ are connected by $(H, \Phi) = 0$ wo $y = \frac{\partial \Phi(\Pi \cdots Z)}{\partial \Pi}$, and so on for the other 3

In Mech. haben wir

$$\int_A^B (T-U)\,dt = \text{Min.}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum m_h\left(x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2\right) - U(r_{12}, r_{13} \cdots)$$

i.e. U. depends on distance only.

In Mech. haben wir 3n grössen und mit

$$\pi_h = \frac{\partial L}{\partial x_h'} = m_h x_h'$$

$$\kappa_h = \quad = m_h y_h'$$

$$\rho_h = \quad = m_h z_h'$$

haben wir 6n fct.

$$H \text{ ist} = T - U - [x_h' \pi_h' + \cdots]$$

$$= T - U - \left[x_h' \frac{\partial T}{\partial x'} + y_h' \frac{\partial T}{\partial y'} + z_h' \frac{\partial T}{\partial z'}\right]$$

$$= T - U - 2T$$

$$= -U - T = -U - \left\{\frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_h}\left(\pi_h^2 + \kappa_h^2 + \rho_h^2\right)\right)$$

Linear trans. along x axis say give us a group of Trans. which leave our Var. Prob. unchanged.

Out of $\varphi = \varphi(\pi_h\ \kappa_h\ \rho_h\ x_h y_h z_h)$
we get the "erzeugenden" of our group

$$X = \sum_h \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial \pi_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_h} \frac{\partial}{\partial x_h} + \quad \cdots\cdots \right\}$$

$x_h = X_h - \alpha$, $\quad \pi_h = \Pi_h$

$y_h = Y_h \quad \kappa_h = K_h$

$z_h = Z_h \quad \rho_h = P_h$

Die coefficienten von α sind
$$\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

or

$$\frac{d\pi_h}{d\alpha} = -1 \qquad \frac{d\pi_h}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{dy_h}{d\alpha} = 0 \qquad \frac{d\kappa}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{dz_h}{d\alpha} = 0 \qquad \frac{d\rho}{d\alpha} = 0$$

$$\varphi = \sum \pi_h$$

$\sum \pi_h = \text{const.}$ $\Big\}$ = Schwerpunktsatz

$\sum m_h x'_h = \text{const.}$

and in same way can we get

$$\psi = \sum \kappa_h = \text{const.}$$

$$\chi = \sum \rho_h = \text{const}$$

aber

$$(H, \varphi) = 0 = \sum \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi}{\partial \pi_h} - \frac{\partial H}{\partial \pi_h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \cdots \right\}$$

$$H = -\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_h} (\pi_h^2 + \kappa_h^2 + \rho_h^2) - U(r_{12} \cdots)$$

Die Hamil. Dif. Gl ist

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum m_h \left\{ \left(\frac{\partial I}{\partial x_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial z_h}\right)^2 \right\} - U(r_{12} \cdots)$$

$$\frac{\partial I(x_h, y_h\, z_h\, t, \alpha)}{\partial \alpha} = \beta$$

Nun handeln wir ähnlich die Flächen Sätze. Here we use rotation instead of translation. Rotations form a group

$$\varphi = \sum_{(h)} m_h (x_h y_h' - y_h x_h') = \text{Const.}$$

$$= \sum_{(h)} (x_h \kappa_h - y_h \pi_h)$$

und unser Symbol X ist

$$\sum \left(\kappa_h \frac{\partial}{\partial \pi_h} - \pi_h \frac{\partial}{\partial \kappa_h} + y_h \frac{\partial}{\partial x_h} - x_h \frac{\partial}{\partial y_h} \right)$$

Und wir mussen haben

$$XH = 0$$

$\frac{d\pi_h}{d\alpha} = \kappa_h$ $\qquad$ $\frac{dx_h}{d\alpha} = y_h$

$\frac{d\kappa_h}{d\alpha} = -\pi_h$ $\qquad$ $\frac{dy_h}{d\alpha} = -x_h$

$\frac{d\rho_h}{d\alpha} = 0$ $\qquad$ $\frac{dz_h}{d\alpha} = 0$

$$x_h = X_h \cos\alpha + Y_h \sin\alpha$$

$$y_h = Y_h \cos\alpha - X_h \sin\alpha.$$

$$z_h = Z_h$$

und durch Differentiation

$$\pi_h = \Pi_h \cos\alpha + \dots$$

$$- \quad - \quad - \quad -$$

und $x_h =$ ~~$X_h +$~~ $x_h + \frac{\alpha}{1!} X x_h + \frac{\alpha^2}{2!} X X x_h$

$$\Psi = \sum (y_h \rho_h - z_h \kappa_h)$$

Aber der Hauptsatz unser Theorie ist

$$(\Psi, \Phi) = \text{const}$$

$$= X\Psi = \sum_h (x_h \cdot 0 + \pi_h z_h + y_h \cdot 0 - x_h \rho_h)$$

$$= \sum_h (z_h \pi_h - x_h \rho_h) = \text{const}.$$

which is the Flächensatz. for y axis

Feb. 19.
(53) (54)

Par. 18

Lagrangian Function.

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \text{min.}$$

$L = T - \mathcal{U} =$ Leg. Fct. for ordinary coordinates.

$T = \frac{1}{2}\sum m_h(x_h'^2 + \cdots) = T(p_1' \cdots p_r'\ p_1 \cdots p_r)$

$\mathcal{U} = \qquad = \mathcal{U}(p_1 \cdots p_r$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_1'} - \frac{\partial L}{\partial p_1} = 0 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} \text{Bewegungs gleichungen.}$$

In Weber's Electric Law,

$T = \frac{e_1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2)$

$\mathcal{U} = W = -\frac{e_1 e_2}{r}(1 + r'^2)$

$L = \frac{e_1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{e_1 e_2}{r}(1 + r'^2)$

$\frac{e}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{e_1 e_2}{r}(1 - r'^2) = \mathcal{E}$

and if we get the manip. Euler. princip.

$\frac{1}{2}\int(T - \mathcal{U} + \mathcal{E})\,dt$ oder

$\int \frac{e}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{e_1 e_2 r'^2}{r}\Big\}\,dt = \text{min}$

Wir bekommen für Var. Ableitungen

$$e_1 x'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} - \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

— — — — —

— — — — — — —

$r^2 = x^2+y^2+z^2$

$r r' = x x' + y y' + z z'$

$$0 = e_1 x'' + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial r'}\frac{x}{r}\right) - \frac{\partial W}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial W}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial x}$$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r'}{\partial x'} = \frac{x}{r}$

$\frac{\partial r'}{\partial x} = \frac{x' r - r' x}{r^2}$

— — — — — — — —

$$e_1 x'' + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'}\frac{x}{r} + \frac{\partial W}{\partial r'}\frac{r x' - x r'}{r^2} - \frac{\partial W}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial W}{\partial r'}\frac{x' r - r' x}{r^2}$$

— — — — — — —

$$e_1 x'' + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'} - \frac{\partial W}{\partial r}\right)\frac{x}{r} = 0$$

— — — — — — —

— — — — — — —

} Webersche Gesetz.

Electron Theorie

$$L = \mu\left\{\frac{v^2-1}{v}\, l\left(\frac{1+v}{1-v}\right)\right\} - U(xyz)$$

Electron.

wo v = Geschwindigkeit of $v^2 = x'^2+y'^2+z'^2$

Man bekommt als Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = X$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = Y$$

$$\text{— — — — } = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z'} = Z$$

which give the Newton eq. for this case.

or
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\cdot\frac{x'}{v}\right)$$
which is homogen. in x'', y'', z'' ect. and instead of mx''; my'' ect we have $m_{11}x'' + m_{12}y'' + m_{13}z''$ where m_{11} ect are not constants.

Ausdruck L liefert.

$$T = \mu\left\{\frac{1+v^2}{2v}\, l\frac{1+v}{1-v} - 1\right\}$$

$$\mathfrak{U} = \mu\left\{\frac{3-v^2}{2v}\, l\left(\frac{1+v}{1-v}\right) - 1\right\}$$

In all of the above we start with

$$\int L\, dt, \quad \text{wo} \quad L = T - \mathfrak{U}$$

where T is in p' -- homogen.

We take 3 cases.

1.) $\int_1^2 L(y', z', y z)\, dt = \text{Min}$

z nicht vorkommt.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z'} = c$$

$$z' = \varphi(y, y')$$

$$L^*(y'y) = \left[L - c z'\right]_{z' = \varphi(y y')}$$

$$\int L^*(y', y)\, dt = \text{Min}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial y'} - \frac{\partial L^*}{\partial y} = 0$$

$$z' = \varphi(y, y') = \varphi_1(y)\, y' + \varphi_2(y)$$

2) See Königsberger Seite. 145..
especially the example on page 152
The function under the $\int$ is such that the Lag. equations do not contain z or z', only z''

3) Helmoltz.
Here the Lag. equations are satisfied by $z = \text{const}$, so that

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z'} = 0$$

$$\text{oder}\left(-\frac{\partial L}{\partial z}\right)_{z'=0} = 0 \quad \text{out of which } z = \varphi(y, y')$$

and we get a modified var. problem.

$$L^*(y, y')$$

We will discuss the Reciprocitäts Gesetze.

Read J. J. Thomson, Anwendung der Mechanik auf Physik.
and Helmholtz.

$$\int_{t_1}^{t_2} L(x', y' x y)\,dt = \text{Min}.$$

$$\int_1^2 \{L - U(xyz)\}\,dt = \text{Min}.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} &= X \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} &= Y \end{aligned}\right\} = \text{aussere Kräfte}$$

Wir ausrechnen

$$X = L_{x'y'}x'' + L_{x'y'}y'' + L_{x'x}x' + L_{x'y}y' - L_x$$

$$Y = L_{x'y'}x'' + L_{y'y'}y'' + L_{y'x}x' + L_{y'y}y' - L_y$$

Nun sagen wir

1.) Nur Beschleunigung ist verändert. x, x' ist unchanged.

$$\frac{\partial X}{\partial y''} = \frac{\partial Y}{\partial x''} = \text{erste Reciprocitäts gesetz}$$

2.

$$\frac{\partial X}{\partial y'} = \frac{d}{dt}(L_{x'y'}) + L_{x'y} - L_{xy}$$

hier Besch. ist fest.

$$\frac{\partial Y}{\partial x'} = - - \;—\; - .$$

adding

$$\frac{\partial X}{\partial y'} + \frac{\partial Y}{\partial x'} = 2 \frac{d}{dt} L_{x'y'}$$

$$\text{or } \frac{\partial X}{\partial y'} + \frac{\partial Y}{\partial x'} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial X}{\partial y''} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial Y}{\partial x'} = 0$$

which is the 2nd Rec. Satz.

3) Here Besch. ad Gesch. are fest.

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d}{dt} L_{x'y} - L_{xy}$$

— — — —

$$\text{and } \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(L_{x'y} - L_{xy'}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial y'} - \frac{\partial Y}{\partial x'}\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \underline{\text{3rd Rec. Satz}}$$

Feb. 22.
(55) (56)

Read Berliner Bericht.

Wenn I ist fct. von beiden Grenzen

$$I(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2) = \int_{\substack{x_1 y_1 z_1 \\ p_1^{(1)} \cdots p_r^{(1)}}}^{\substack{p_1^{(2)} \cdots p_r^{(2)} \\ x_2 y_2 z_2}} L\,dt$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = p \quad \frac{\partial I}{\partial y} = q \quad \frac{\partial I}{\partial z} = r$$

$$\frac{\partial I}{\partial x_2} = P_2 (\quad)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = -P_1 (\quad)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2} = 0$$

Par. 19 gleichgewicht — Under what circumstances will a point or number of points remain at rest.

velocity = 0

$$\int_A^B L\,dt = \text{min}$$

Lag. gl.
$$\left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p'} - \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \right.$$

But if p' is to be 0 our equations are simply the last term = 0.

$$L = T - U$$

and we get

$$\frac{\partial U}{\partial p_1}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial p_2}=0 \quad --- \quad \frac{\partial U}{\partial p_r}=0$$

U = pot. ~~eng~~ energy. These are necessary cond. for min or max of U.

Wir haben gesehen.

$$m_1 x_1'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \cdots \qquad f = 0$$

$$0 \qquad -\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial (U + \lambda f)}{\partial x} = 0 \qquad U(xyz) = \text{Max. Min.}$$

$$\frac{\partial (U + \lambda f)}{\partial y} = 0 \qquad f(xyz) = 0$$

$$\frac{\partial (U + \lambda f)}{\partial z} = 0$$

This gives us the relation between the theory of equilibrium and of max. min.

If we require that a slight motion given to our point does not push it out of an arbitrary ~~small~~ domain, we have <u>stabil gleichgewicht</u>. Otherwise <u>unstabil</u>

Now we come to Dirichlets prob.

He says that $\mathcal{U} = \overset{\text{min or max}}{0}$ is equivalent to stabil gleichgewicht.

Let us have

$$\mathcal{U}(p_1 - - - p_n) = 0$$

Take small ε

$\mathcal{U} = 0$ is for our point itself

$\mathcal{U} = \varepsilon$, on the circle.

$\mathcal{U} < \varepsilon$ inside the "

Let a Geschwindigkeit findet so statt dass $T_0 < \varepsilon$ at the point.

Then on the edge of the gebiet, nach

$$T + \mathcal{U} = \text{const}.$$

but in the beginning $\mathcal{U} = 0$

$$T_0 + 0 = \text{const}.$$

$$T + \mathcal{U} = T_0.$$

now suppose a point passes, or reaches the edge.

$$T + \varepsilon = T_0$$

$$T = T_0 - \varepsilon$$

or Kinetic Energy is negative, which is impossible which gives us Dirichlet's proof.

Special case.

$$U(xyz) = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + - - -$$

$$r_1 = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1+y)^2 + (z_1-z)^2}$$

U satisfies $\Delta U = 0$

And under the effect of this U there is no equilibrium, or there is no minimum for Newton. Potential.

In mechanics of a continua the above problem becomes one in Var.-rechnung

Die Bewegung in der nahe ein Punkt in Gleichgewicht. Wie findet ~~diese~~ Bewegung statt.

Let a Kraft work on 2 points 1 and 2

y Y_1 Y_2 x 1 2

$U + Yf$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y_1} = Y_1$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial y_2} = Y_2$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Wir haben nebenbedingung

$$f(x_1 y_1 x_2 y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$0 + \lambda y_2 = 0 \qquad 0 - \lambda y_1 = 0$$

$$-\mathfrak{U} - \lambda x_2 = 0 \qquad -Y_2 + \lambda x_1 = 0$$

mul. last two mult x_1 and x_2

we get. $x_1 Y_1 + x_2 Y_2 = 0$

and we see here we have the law of the lever for equilibrium.

Theorie der Kleine Schwingung

$$T = T(p_1' \cdots p_r' \; p_1 \cdots p_r)$$

$$= \sum_{h,k=1,2\cdots r} \Phi_{h,k} p_h' p_k'$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_1} = 0 \cdots\cdots$$

$$p_1 = 0; \cdots p_r = 0$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(p_1 \cdots p_r)$$

$$= \sum_{h,k=1\cdots r} A_{hk} p_h p_k$$

$$= \sum_{h,k} a_{hk} p_h' p_k' + \cdots$$

Then $L = T - U$

$$T = \sum a_{hk} p_h' p_k',$$

$$U = \sum$$

Use a linear combination of the ps so that $p_h = L(q_h)$ $\quad p_h' = L(q')$

$$q = L^*(p_h)$$

$$T = q_1'^2 + \cdots q_r'^2.$$

$$U = k_1 q_1^2 + \cdots + k_2 q_r^2$$

getting $L = T - U$. and then the Lag. equations we have

$$\left.\begin{array}{l} q_1'' + k_1 q_1 = 0 \\ - - - - - \\ q_r'' + k_r q = 0 \end{array}\right\} = r \text{ Df. Gl.}$$

integrating we get.

$$q_1 = C_1 \sin\sqrt{k_1}\, t + C_1' \cos\sqrt{k_1}\, t.$$

$$- - - - - - - -$$

$$q_r = C_r \sin\sqrt{k_r}\, t + C_r' \cos\sqrt{k_r}\, t$$

Schwingungsdauer is $\frac{2\pi}{\sqrt{k_1}} \cdots \frac{2\pi}{\sqrt{k_r}}$

We might have

$q_1 = C_1 e^{\sqrt{-k_1}\,t} + C_1' e^{-\sqrt{-k}\,t}$.

but there is no schwingung - the point goes on or remains fixed (if $c_1 = c_1' = 0$)

Equilibrium ist labile

Feb. 9. 10
(57)(58)
Par. 20.
Anwendung der. Var. ich. auf der Theorie der Impulse.

Wir beginnen mit Beispiele

2 Kugel (elastisch) hit each other in x axis at $t = t_1$

m_1 m_2
1 2 x

Was ist elastisch: at t_1 balls are together

Innere Krafte acts during time τ

Let " " $= F(x_2 - x_1)$

when $t < t_1$ ist $F(x_2 - x_1) = 0$

During $t_1 + \tau$ is F very great.

$t > t_1 + \tau$ is $F = 0$.

Now let

$$m_1 x_1'' = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$m_2 x_2'' = \frac{\partial F}{\partial x_2} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$m_1 x_1'' + m_2 x_2'' = 0$$

Auch kommt heraus

$$\left(m_1 x_1'^2 + m_2 x_2'^2\right)' = \frac{dF}{dt}$$

$$m_1 x'^2 + m_2 x \quad = F$$

$(x_1')_{t<t_1} = u_1 \quad ,, {}_{t>t_1} \; v_1$ oder vor und nach stoss

$(x_2') \quad = u_2 \qquad v_2$

$$\begin{cases} m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{cases}$$ because Kinetic Energy is unchanged.

which are two equations for v
for we know the velocity before stoss

$$m_1(u_1 - v_1) + m_2(u_2 - v_2) = 0$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) + m_2(u_2^2 - v_2^2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u_1 + v_2 & u_2 + v_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (muss} = 0)$$

oder $u_2 + v_2 - u_1 - v = 0$

$$v_2 - v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 u_1 + (m_2 - m_1) u_2}{m_1 + m_2}$$

Another Beispiel. Let the balls be un-elastic. Then from time $t = t_1$ is

$x_2 - x_1 = 0$.

Let $x_2 - x_1 = f(t)$

$f(t) = \infty \quad t \leq t_1$
$\quad = 0 \quad t \geqq t_1$ } can look upon this as a Nebenbedingung

$m_1 x_1'' = -\lambda$ wo λ is the Lag. factor.

$m_2 x_2'' = +\lambda$

or $m_1 x_1'' + m_2 x''' = 0$

and before the stoss

$m_1 n_1 + m_1 n_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

$v_1 = v_2$

$(m_1 + m_2) v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

und aus

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2} \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + 2 m_1 m_2 u_1 u_2\right)$$

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left\{2 m_1 m_2 u_1 u_2 - 2 m_1 m_2 u_1^2 - u_1^2\right\}$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2 = \text{positive}$$

or dif. in kinetic energy is positive or kin. energy is lost. In an exploding bomb we have an increase of kinetic energy.

In the first beispiel if $m_2 = \infty$, $u_2 = 0$

$v_2 = 0$, $v_1 = -u_1$

and if $m_1 = m_2$ then $v_2 = u_2$, $v_1 = u_2$

Nun lassen uns für Kraft komponenten nehmen X, Y, Z

$t = t_1$ bis $t_1 + \tau$

Let τ be smaller and smaller, then we get a sudden bend in path.

z bahn curve

path during τ

$$\underset{\tau=0}{L}(\tau X) = A.$$

$$\underset{\tau=0}{L}(\tau Y) = B$$

$$\underset{\tau=0}{L}(\tau Z) = C$$

$$m x'' = X \qquad \Big[m x'\Big]_{t_1}^{t_1+\tau} = \int_{t_1}^{t_1+\tau} X\,dt$$

$$m y'' = Y \qquad \Big[m y'\Big]_{t_1}^{t_1+\tau} = \int_{t_1}^{t_1+\tau} Y\,dt$$

$$m z'' = Z. \qquad \Big[m z'\Big]_{t_1}^{t_1+\tau} = \int_{t_1}^{t_1+\tau} Z\,dt$$

$$\left.\begin{aligned} m[u] &= A \\ m[v] &= B \\ m[w] &= C \end{aligned}\right\} = \text{stoss componenten}$$

We can think of ~~infinite~~ great number of impulses then the path is a polygon and in the limit we get a smooth curve, or in other words we start with our above results and get back to Newtons equations

Als Hauptgesetz haben wir gefunden

$$m[u\,v\,w] = (A, B, C)$$

In our first Beispiel ~~they are~~ it is

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$T_1 - T_2 = C$$

The extreme cases are $c = 0$ in case of pure elasticity and $c = \infty$ in case of un elastic.

Der gradient Kinet. energ. nach geschwind sind.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}\right) = (A, B, C)$$

$p_1\ p_2 \cdots p_r$ = parameter

$$\frac{\partial T}{\partial p_1'} = P_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_2'} = P_2$$

— — — —

Is a condition given

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

— — — — — —

$$\frac{\partial T}{\partial z_n'} = Z_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_n}$$

Bertrands Max. satz

By mul. mit $\frac{1}{2}p_1'$, $\frac{1}{2}p_2'$ etc

we get out of above equations

$$T = \frac{1}{2}(p_1' P_1 + \cdots p_r' P_r) = \text{energie satz}$$

Bertrands Max. Satz is.

<u>that $T = \max$</u>..

$$T + \lambda\left(T - \tfrac{1}{2}(p_1' P_1 + \cdots\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_1'} + \lambda \frac{\partial T}{\partial p_1'} - \frac{1}{2}\lambda P_1 = 0$$

— — — — —

and aus diese bekommen wir

$$T + \lambda \cdot 2 \cdot T - \lambda T = 0$$

oder $\lambda = -2$

$$\frac{\partial T}{\partial p_1'} - 2\frac{\partial T}{\partial p_1'} + P_1 = 0$$

Let $q_1' \cdots q_r'$ be dif. from $p_1' \cdots$

but which satisfy the energie satz.

but p_s satisfy equations on page 204.

$$T(p_1' - q_1', p_2' - q_2' \cdots) > 0$$

$$(p_1'-q_1')\left(\frac{\partial T}{\partial p_1'}-\frac{\partial T}{\partial q_1'}\right)+\cdots(p_r'-q_r')(\quad)>0.$$

$$(p_1'-q_1')P_1 - p_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'} - q_1'\frac{\partial T}{\partial q_1'} + \cdots > 0$$

und $(p_1'-q_1')P_1 - q_1'P_1 + q_1'P_1 + \cdots > 0$

und aus diese

$$2\,T(p_1'\cdots) - 2\,T(q_1'\cdots) > 0$$

which proves Bertrands law (or principle)

Ostwald's principle is some what similar — Mar. 1 (59) (60)

Ein Minimal princip von Lord Kelvin kommt aus Bertrands Princip.

Was macht Var. Rech. in unser Falle

Wir haben $\int_A^B F(y', z', y, z)\,dx = \text{Min}$

In unser Raum haben wir eine Fläche Ω which divides the space into two parts 1 and 2. F is unstetig at Ω.

Das Brechung Gesetz lautet so

$$F_1(p_1 q_1) + (y' - p_1)\frac{\partial F_1}{\partial p_1} + (z' - q_1)\frac{\partial F_1}{\partial q_1}$$

$$= F_2(p_2 q_2) + (\quad) + (\quad)$$

This equation must hold for every y', z' which satisfies

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega}{\partial z} z' + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$$

or $$\left(F - p\frac{\partial F}{\partial p} - q\frac{\partial F}{\partial q}\right)_1 - (\quad)_2 = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_2 = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$(\quad)_1 - (\quad)_2 = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

Nun in unser Fälle haben wir.

$L = T - U$ instead of F

t	"	x	
y, z	"	$p_1 \text{---} p_r$	This column should be on the other side under $L = T - U$ etc
y', z' --	"	$p_1' \text{---} p_r'$	
$p\ q$	"	$q_1 \text{--} q_r$	
		$q_h = p_h'$	

$\Omega(p_1 \dots p_r) = 0$ $\quad U = U_1 \quad T = T_1 \quad \Omega < 0$

$U = U_2 \quad T = T_2 \quad \Omega > 0$

$$L - q_1 \frac{\partial T}{\partial q_1} - \dots - q_r \frac{\partial T}{\partial q_r} = \left(L - q_2 \frac{\partial T}{\partial q_2} \dots \right)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)_2 = \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial p_1}$$

— — — — —

— — —

or the first can be written

$$(T + U)_1 = (T + U)_2$$

$p_1' \dots p_r'$ sind gegeben. $= (q_1 \dots q_r)_1$

and we must find $(q_1 \dots q_r)_2$

If we construct the potential surfaces $U = \delta$, $U = 2\delta$ etc. we get and we can construct the path

Suppose we have only the Lag. Gl. for F_1, F_2 and think of them and not the original Var. Prob. If we can find a multiplicator M so that these equations

are complete integrals

$M(\quad) = 0$

or $\Phi(y'z'yz) = 0$

and we must have $\Phi_1 = \Phi_2$

In going on to the Mechanics of a Continuum we take first the study of the rigid body which may be considered as a problem in Mech. of Contin. where the whole continua moves.

The next step is Hydrodynamics where the points of the body move but when they approach each other their velocities approach equality.

Then comes the step which is illustrated by the Kinetic Theory of Gases where two points move and as they approach each other their velocities may or may not approach each other.

I will now take up Poincaré's work
Let all our points be in finite gebiet

Dann besteht Poincaré's satz.
Let points have "anfangs lage"
Then there is a lage very near
the anfangs lage

To prove we use a hilfs satz.
Let our space be 3 dimension.

$R = 3$

$x_1 \cdots x_R$ = coordinaten

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1 \cdots x_R)$$
$$\text{— — — — —}$$

} equation of motion of fluid (incompressible)

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots \frac{\partial X_R}{\partial x_R} = 0$$

Take a piece of this fluid at $t = 0$ in eye

F moves to position F' in time t. Another F in time t' will move to this same position if we wait long enough. Let $t' > t$

Anwendung Poincaré satz.
Point moves without force on a surface

§ 14. Satz von der Erhaltung der Energie. Integralprincipien.

Zu den 9 Integralen, die wir im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben, tritt nun noch ein 10tes als genaue Verallgemeinerung des Energie Inte., das wir bei der Bewg. eines Pkts. im § kennen gelernt hatten. Genau wie dort wollen wir folgende Annahmen über Kräfte und Bedingn machen:

1) Es existiere eine Kraft $F = F(x_1 \ldots z_h)$ die von der Zeit t nicht explicit abhänge.

2) Sind die Bedingglen (holonom) ~~holonom~~, so mögen sie gleichfalls t nicht explicit enthalten. Es wird aber auch nicht-holonome Bedingn zugelassen, wofern sie die Geschwdgk. $x_1' \ldots z_h'$ homogen enthalten d. h.

$$x_1' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1'} + \cdots + z_h' \frac{\partial f}{\partial z_h'} = r \cdot \left(f(x_1' \ldots z_h' \; x_1 \ldots z_h \; t \right) ;$$

die Bedingung darf also nur die Quotienten $\frac{x_1'}{z_h'} \cdots \frac{y_n'}{z_n'}$ die geometrische Richtungsgrössen sind, binden. Im letzten Falle

darf t in f ganz beliebig auftreten. Diese Bedingungen sind ganz anderer Natur als die wirigen. Characteristisch ist, dass bis auf den letzten Fall das Explicite Auftreten von t ausgeschlossen wird, das früher gerade nichts ausmachte. Dann sind die Lagra. Glm

(1)

$$m_h \cdot x_h'' = \frac{\partial F}{\partial x_h} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_h} \left(+ \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h'} \right) \text{etc}$$

Wir können uns nun eine integrable Kombination herstellen, indem wir die Glm mit x_h', y_h' z_h' multipli- und add-. Dann treten rechts nämlich unter Berücksichtigung der Voraussetzungen die Terme auf:

$$\sum_h \left(\frac{\partial F}{\partial x_h} x_h' + \frac{\partial F}{\partial y_h} y_h' + \frac{\partial F}{\partial z_h} z_h' \right) = \frac{dF}{dt}$$

$$\lambda \sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} x_h' + \frac{\partial f}{\partial y_h} y_h' + \frac{\partial f}{\partial z_h} z_h' \right) = \lambda \frac{df}{dt} = 0$$

da für die ganze Beweg. die Beding. $f = 0$ besteht, dasselbe gilt für jede andere holonome Beding. $g = 0$;

Wir haben nun unter sehr weiten Voraussetzungen 10 von den 6n Integralen der Lagrangeschen Glen in sehr einfacher Weise gewonnen; dass sie möglich sind liegt an der besondern Form, die diese Glen als aus gewissen einfachen Variationsproblemen entspringende Glen haben. Es entsteht nun die Frage, ob man nicht noch weitere solche allgemeine Integrale angeben kann. Natürlich wird man bei speciellen Probl. sogar sämtliche Integrale direkt angeben können; dass aber allgem. Theorie wie die bisherigen nicht weiter mehr möglich, und dass unsere 10 Integrale die einzigen allgemeinen Integ. in gewissem Sinne sind, zeigt folgender sehr interessante

Satz von Poincaré: Bereits bei dem Newtonschen Dreikörperproblem gibt es ausser den 10 bekannten Int. (6 Schwerpunkt-, 3 Flächen-, 1 Energieint.)

kein weiteres eindeutiges Integ. d. h. eine eindeutig. ~~alg~~ analytische Fkt.
$f(x_1 \dots z_3, x_1' \dots z_3', t)$
der 19 Argumente die von jenem Integ. unabh. ist und für den ganzen Verlauf der Beweg. constant ist.
Die ersten 10 Integrale haben sogar noch die Specialität, dass f eine rationelle F (von $x_1 \dots z_n, x_1' \dots z_n'$ und der m_h .. die in die Kräft fkt. eingehen) ist. und t nicht explicit auftritt. Nach den allgemeinen Existenz theoremen bestimmten die Diff. gln $x_1 \dots z_3$ als analytische Fn von und 18 Integral konst.:

$$X_1 = x_1(t, c_1 \dots c_{18})$$

$$\dots$$

$$z_3 = z_3(t, c_1 \dots c_{18})$$

Fügt man die durch Differentiation nach t entstehenden Gln hinzu, so erhält man durch Auflösen nach $c_1 \dots c_{18}$ 18 analy. Integrale:

$$f_1(x_1 \dots z_3, x_1' \dots z_3', t) = c_1$$

für die nicht hol[onomen] Beding. wird endlich gleichfalls

$$\lambda \sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial x'_h} x'_h + \frac{\partial f}{\partial y'_h} y'_h + \frac{\partial f}{\partial z'_h} z'_h \right) = \lambda \cdot \nu \cdot f = 0$$

so dass wir in jedem unseren Voraussetzungen genügenden Falle erhalten:

$$\sum_h m_h \left(x'_h x''_h + y'_h y''_h + z'_h z''_h \right) = \frac{dF}{dt}$$

Man nennt nun die halbe Summe der mit den Massen multiplicierten Geschwdkt. quadrate

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h} m_h \left(x'^2_h + y'^2_h + z'^2_h \right) \qquad (2)$$

deren totale Ableit. nach t links steht, die kinetische Ener. (lebendige Kraft) der Bewegung. Hat man eine bestimmte Beweg. so gehört ihr zu jeder Zeit ein bestimmter Wert T zu. Man führt ferner

$$U(x_1 \cdots x_h) = -F(x_1 \cdots x_n) \qquad (3)$$

als potentielle Ener. oder Potential des Kräftesyst. ein. Es ist eine von der Natur

2:9

des Krä. sys. abhge. und es charakt-de Orts f.. Unser Integrable Kombination schreibt sich nun

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0;$$

oder nach Integration

(4) $$T + U = \text{Const} = \mathcal{E}$$

wo $\mathcal{E}$ die Integrationskons. als Wert der Gesamtener. des Sys. bezeichnet wird.

Satz von der Erhaltung der Ener.: Für jedes Sys. dessen Kräfte und Bedn. den obigen Voraussetzung genügen, ist während der ganzen Beweg. die Summe von kinet-er und pot. Ener. (Gesamtener.) konstant.

Dieser Satz wie auch der des § 13 sind besonders wichtig auch deshalb, weil ihre Vor.setzgn in der Natur stets dann erfüllt zu sein scheinen, wenn man nur genügend grosse Syste in Betracht zieht.

$f_{18} = (x_1 \dots z_3, x_1' \dots z_3', t) = c_{18}$

Unser Satz sagt aus, dass davon nur 10 eindeutig sind, und dass diese gerade unsere 10 bekannten Integralaequiv. sind

Ganz wie früher bei einem Massenpkte kann man nun auch wieder den Begriff der Arbeit definieren. Man nennt für irgend eine Beweg zwischen den festen Lagen $1(x_h^{(1)} \dots z_h^{(1)})$ und $2(x_h^{(2)} \dots z_h^{(2)})$ gebildete Integral.

$$A_{12} = -\int_1^2 \sum_{h=1}^{m} \left(X_h x_h' + Y_h y_h' + Z_h z_h'\right) dt \quad (5-)$$

$= U_2 - U_1$ das wegen der Existenz des Pot$^{\underline{s}}$ gleich der Diff$^{\underline{s}}$ seiner Werte bei 1 und 2 und daher unabh. von der spec. gewählten Beweg ist, die Arbeit des Sys. bei jener Beweg. und man spricht genau wie früher (vgl. § 10 je nach dem Vorzeichen von gewonnener

221

oder geleisteter Arbeit etc. – – –

Statt die Beweg. als Gesamtheit von n Curven im dreidimensionalen Raume zwischen Anfangs- und Endort jedes der n Pkte. des Sys. aufzufassen, kann man auch hier wieder zweckmässig jede Lage des Syst. als einen Pkt. in einem $3n$-dimen. Raume R_{3n} mit den Koord$\underline{n}$ $x_1 \dots z_n$ auffassen, und jede Beweg als Curve in ihm: das Arbeits-integr$\underline{l}$ wird dann einfach ein Linien-integral in diesem R_{3n} auf einer Curve zwis. den beiden Pkt$\underline{n}$ $1(x_1^{(1)} \dots z_n^{(1)})$ und $2(x_1^{(2)} \dots z_n^{(2)})$. Man kann das Integr$\underline{l}$ (5) für jede solche Beweg. ~~doch~~ auch bilden, wenn keine Krä. flt. existiert, allein es wird dann nicht mehr nur von den Endlagen abh. sein, und zu verschiedenen Beweg$\underline{n}$ zwis. denselben Lagen werden verschiedene Arbeits-werte gehören.

Die Gl. $V(x_1 y_1 z_1 \dots x_n y_n z_n) = \text{Const}$ stellt in dem R_{3n} eine einparametrige

Flächenschar dar, die wir wieder als Niveauflächen bezeichnen werden. Um ein Sys. aus einer Lage in eine andere zu bewegen, die im R_{3n} durch Pkte derselben Niveaufläche dargestellt werden, ist gar keine Arbeitsaufwand nötig, da ja $U_2 = U_1$ ist. Eine noch so schweren Last auf einer absolut glatten Eisfläche, die die Reibung ausschliesst und Niveaufläche der Schwerkraft ist kann also ohne Arbeitsleistung beliebig weit bewegt werden; die Ener. die man beim Ansatz aufzuwenden hat um sie überhaupt in Beweg zu setzen, wird sie beim Anhalten wieder abgeben.

Wir kommen nun zur Aufstellung d. Integralprincip für Pkt. sys^e, wo wir wieder genau nach Analogie der gleichen Betrachtungen bei einzelnen Pkt^n verfahren werden. Die Bed. gl^n des Sys. können ebenso halten, nur sollen die Ableit^n $x_1' \dots z_n'$ nicht vorkommen.

Dann gilt wieder als einfachsten und wichtigsten Prin. das Hamilton'sche Prin.

Fassen wir 2 nicht zu sehr differierende Zeiten t_1, t_2 ins Auge, so wird das Integral über die Differenz der kinet. u. pot. Ener.

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt$$

bei der wirklich stattfindenden Beweg. ein Min. sein im Vergleich mit allen andern Beweg., die mit den (holonomen) Bed. verträglich von derselben Anfangslage $(x_1^{(1)} | y_1^{(1)} | z_1^{(1)} \dots z_n^{(1)})$ zur Zeit t_1 nach derselben Endlage $(x_1^{(2)} | y_1^{(2)} | z_1^{(2)} \dots z_n^{(2)})$ zur Zeit t_2 führen. Diese Aussage bestimmt die Beweg. eindeutig. Das ist ein gewöhnliches, einfaches Var. probl. genau wie wir es in II allg. betrachteten. T ist ein bekannter Ausdruck in den Ableit. der 3n unbek. Fkt.:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_h (x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2)$$

U ein bekannter Ausdruck in diesen t selbst

$$U = U(x_1, \dots z_n, t)$$

als Neben-Beding. mögen etwa

$$f(x_1, \dots y_n z_n t) = 0 \qquad g(x_1, \dots z_n t) = 0$$

hinzutreten. Wir haben zu zeigen, dass

unser Var. Prob. genau auf die Lagra $\underline{n}$ Gl $\underline{n}$ führt. Nun ist die not. Bed. für das relativ Ulm. bekanntlich durch das Verschwinden der $3n$ Var. ableit $\underline{n}$ von

$$T - U + \lambda f + \mu g$$

nach den $3n$ unbekannten F $\underline{n}$ gegeben, d. h. (vgl § 11 (3 $\underline{h}$) S 201) durch die $3n$ Gl $\underline{n}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T - U + \lambda f + \mu g)}{\partial x'_h}\right) - \frac{\partial(T - U + \lambda f + \mu g)}{\partial x_h} = 0 \quad \text{etc.}$$

Da U, f, g von x'_h unabh. sind und $\frac{\partial T}{\partial x'_h} = m_h x'_h$, $\frac{\partial T}{\partial x_h} = 0$ ist so ergiebt sich

$$m_h \cdot x''_h = -\frac{\partial U}{\partial x_h} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_h} \quad \text{etc.}$$

und das unter Hinzuziehung von $f = 0$, $g = 0$ sind genau die $3n + 2$ Lagra $\underline{n}$ Gl $\underline{n}$ für die $3n + 2$ Unbek $\underline{n}$ $x(t) \ldots z_n(t)$ $\lambda(t)$ $\mu(t)$. Damit ist das Hamil. Prin. bewiesen, oder genauer, es ist gezeigt dass es gerade das Var. prob. ist zu dem die Lagra $\underline{n}$ Gl $\underline{n}$ als die aus dem Verschwinden der 1 Var. ent-

stehenden Diff. glen 2 Ord. gehören.
Wir kommen nun zweitens zu dem Euler Maupertuisschen Princ. der kleinsten Wirkung. Beschränken wir uns nämlich auf den Fall dass U und die Bedingen auch t nicht explicit enthalten, so gilt es ja der Ener. satz:

$$T + U = \text{Const} = E.$$

Es liegt nahe überhaupt nur Beweg.en zu betrachten, die diesem Satze genügen mit dem konst.en Werte E. d. h. das Sys. mit dem Gesamt Ener. (einem durch die wirkliche Beweg zahlenmässig best.ten Werte) aus der Lage 1 zur Zeit t_1 in die 2 zur Zeit t_2 überführen. Das Hamil. Int. I ist für diese Beweg.en

$$\int_{t_1}^{t_2}(T - U)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(2T - E)\,dt = 2\int_{t_1}^{t_2} T\,dt - E(t_2 - t_1)$$

und das Prin. sagt aus, dass verglichen mit diesen Beweg.en die wirkliche auch $\int_{t_1}^{t_2} T\,dt$ zum Minimum macht. Diese Forderung mit der Nebenbed. $T + U = E$ bestimmt aber umgekehrt nicht die Beweg. richtig: Wir kommen das schon daraus

dass mit t_1, $x_1^{(1)}$ — $x_n^{(1)}$, t_2 $x_1^{(2)}$ — $z_n^{(2)}$ die Beweg. und damit auch die Ener. E vollkommen best. ist, dass wir also jetzt nicht umgekehrt, nachdem E mit den Neben bed. gegeben ist, noch alle jene Grössen t_1 -- $z_n^{(2)}$ willkürlich wählen können. Wir müssen also eine Randbeg fallen lassen, und so kommen wir dazu das durch die Neben bed. eingeschränkte Gebiet der Vergleichs Bahnen andererseits dadurch zu erweitern, dass wir alle Beweg.en mit in Betracht ziehen die nur überhaupt zu irgend einer Zeit t die Lage 2 passieren während vorher auch $t = t_2$ gegeben war. Durch diese Überlegung die den bei einem Pkte nötigen (vgl. 9 11 S 207) genau nach gebildet ist kommen wir zur Aufstellung des richtigen:

<u>Euler'schen Princ. der kleinsten Wirkung</u>:

Die Beweg. eines Massensys. aus einer Lage 1 ($x_1^{(1)}$ -- $z_n^{(1)}$) zur Zeit t_1 nach einer andern nicht zu sehr differierenden Lage 2 ($x_1^{(2)}$ -- $z_n^{(2)}$) bei gegebenem

Werte E der Gesamtener. T + U (wobei die in U willkürliche additive Constante beliebig aber fest normiert gedacht ist) geschieht so, dass das Integral

$$\int_{t_1}^{t} T\,dt$$

für sie ein Min.! und im Vergleich zu allen andern Beweg^n^, die mit den Bed^n^ verträglich sind, für die der Satz von der Erhaltung der Ener.

$$T + E = E$$

gilt, und die von der Anfangslage 1 zur Zeit t_1 ausgehend überhaupt zu irgend einer Zeit t das System in die Lage 2 führen. Durch diese Forderung ist die wirklich stattfindende Beweg. insbesondere auch die Zeit $t = t_2$ für die sie das Sys. nach 2 bringt, eindeutig bestimmt. Auf den Beweis dieses Prin^e^ d.h. den Nachweis seiner Aequivalenz mit dem Hamil. ~~braucht~~ brauche ich hier nicht mehr einzugehen: er ist die genaue Wiederholung des im Falle eines Pkts. geführten Beweises.

Ich mache hier nur noch die allgemein Bemerkung, dass der Übergang vom Hamil.

zum Euler'schen Prin. einen sehr fruchtbaren allg. Gedanken enthielt, der auch mathematisch sehr interessirt; es handelt sich um die Frage was aus einem Var. prob. wird wenn man ein bekanntes Integral seiner Lagran Gln mit vorgegebenen Werte der Integrations kons n als Nebenbed. zur Einschränkung der zur Concurrenz zuzulassenden Fktn benutzen will (wie hier das Ener. integl. Wie muss man das Var. prob. abändern, damit mit diesen Nebenbed. doch wieder die alten Gln heraus kommen. Wir werden darauf wohl später noch zurück kommen können.

Vom Euler'schen Prin. kommen wir nun endlich wieder leicht zu dem Jacobischen Prin. der kl. st Wirkung, indem wir mit Hilfe der Ener. Gl die Zeit t aus dem Integl e eliminieren, und so wieder ein Prob. ohne Nebenbed. erhalten. Wir führen dazu statt der Zeit t den folg. Parameter für die Beweg. ein:

$$s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{2T}\,dt = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\sum_{h=1}^{n} m_h(x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2)}\,dt = s(t)$$

wir können s als Bogenlänge der Beweg. im 3n dimensionalen Raume R_{3n} der $(x_1 \ldots z_n)$ entsprechenden Bahnk. deuten, wenn wir auf den Achsen geeignete Messstäbe wählen (vgl. § 12). Führen wir die geeignete normierte Krä. flkt.

$$E - U(x_1 \ldots z_n) = F(x_1 \ldots z_n)$$

ein so können wir wegen des Ener. satzes

$$T = F$$

das Wirkungs Integral schreiben:

$$\int_{t_1}^{t} dt = \int_{t_1}^{t} \sqrt{T}\sqrt{T}\,dt = \int_{t_1}^{t} \sqrt{F}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{ds}{dt}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{F}\,ds$$

Hier kommt t nicht mehr vor, so dass wir ein rein geometrisches Var. prob. haben dessen Grössen sich lediglich auf die Bahnk. im R_{3n} beziehen. Die Grenzen sind nur scheinbar unbestimmt, denn nur bezüglich der Endpkte. 1, 2 der Curve im R_{3n} und die sind allein mitgeteilt. an dem Rand bed. während die Randwerte von s irrelevant sind. Wir können ja z. B. die Curve dadurch beschreiben dass wir $y_1 \ldots z_1 \ldots z_n$ als Fktn von x_1 darstellen dann fällt s vollkommen aus dem Integl heraus, da für jeden andern Parameter σ

(z. B. auch $\sigma = x_1$):

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{\sum_{h=1}^{n}\left(\left(\frac{dx_h}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy_h}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz_h}{d\sigma}\right)^2\right) m_h}$$

gilt und wir erhalten ein Integl. nach x_1 im bekannten Interval ($x_1^{(1)}$ $x_1^{(2)}$). Haben wir die geom. Verhältnisse gefunden, so bestimmen sich die zeitlichen aus dem Ener. integl. Das Jacobische Prin., das also nichts als eine formale Trans. des Eulerschen ist, sprechen wir nun so aus:

Jacobi's Princip der kleinsten Wirkung:

Findet ~~eine~~ Beweg. zwis. den beiden nicht zu fernen Lagen 1($x_1^{(1)}$ -- $z_n^{(1)}$) und 2($x_1^{(2)}$ -- $z_n^{(2)}$) statt unter dem Einflusse einer Krä. fkt. $F(x_1 -- z_n)$ so macht die Bahnk. das folgende Linienintegral zwis. 1 und 2 im Raume der x_1 -- z_n:

$$\int_1^2 \sqrt{F(x_1 -- z_n)}\,ds \quad \text{wo } ds^2 = \sum_{h=1}^{n} m_h \left(dx_h^2 + dy_h^2 + dz_h^2\right)$$

zum Min. verglichen mit allen andern in diesem 3_n-dimens. Raume zwis. 1 und 2 möglichen den Bedn genügenden Curven. Der Ablauf der hindurch räum

lich bestimmten Beweg. in der Zeit ist
durch den Ener. satz:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = F(x_1, \ldots z_n)$$

und die Forderung das für $t = t_1$ das Sys.
die Lage 1 hat, bestimmt.

Der Vorteil der Integr. prinz. von denen
wir die wichtigsten nunmehr gewonnen
haben, besteht einmal in dem bequemeren
Überblick, den sie über die mechanischen
Gl. zu gewinnen gestatten, indem sie sie
in eine einfache Formel komprimieren;
man kann das als ihren logischen Wert
bezeichnen. Daneben besitzen sie aber einen
sehr grossen praktischen Wert indem sie
Rechnungen und Trans. die mit den
Lagra. Gl. sich nur sehr mühsam
durchführen lassen, sehr einfach und elegant
gestalten; das liegt daran, das sie nur
Abl. 1 Ord. enthalten, während die Diff.
Gl. zur 2 Ord. ansteigen. Diese Eigen-
schaft wollen wir uns jetzt zu Nutze machen
wenn wir aus den Lagra. Gl. die Bed.
eleminieren wollen.

Hat man allg. μ Bed. Gl.

(6) $f_i(x, y, z, \ldots x_n\, y_n\, z_n\, t) = 0 \quad (i = 1 - m)$

so kann man von vornherein daraus
m der $3n$ Koord$\underline{n}$ durch die übrigen
$\underline{r = 3n - m}$ ausdrücken, die dann
keiner Bed. mehr unterliegen. Oder
man kann allg$\underline{.}$ die $x, \dots z_n$ als
Fkt$\underline{n}$ von r Parametern $p_1, \dots p_r$ und t

$$\left\{\begin{array}{l} x_h = x_h(p_1, \dots p_r, t) \\ y_h = y_h(p_1, \dots p_r, t) \\ z_h = z_h(p_1, \dots p_r, t) \end{array}\right\} (h = 1 \dots n) \qquad (6')$$

so bestimmen, dass $f = 0$ identisch in
$p_1, \dots p_r, t$ bestimmt sind. Dann
entspricht jedem Wertecomplex $(p_1, \dots p_r, t)$
eine mit den Bed$\underline{n}$ verträgliche Lage des
Sys. und umgekehrt, und jede mit den
Bed$\underline{n}$ verträgl$\underline{.}$ Beweg. wird durch ein
Sys. von r Fkt$\underline{n}$

$$p_1 = p_1(t) \quad p_2 = p_2(t) \dots p_r = p_r(t)$$

dargestellt, die durch die Bed$\underline{n}$ keinerlei
Beschränkung mehr unterliegen. Ist die
Bed. z. B. die, dass ein Pkt. an eine
Kugel gefesselt ist:

233

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$

so wird man für $p_1\ p_2$ die Polarcoord^n ϑ φ auf der Kugel durch

$$x = r_1 \cos\vartheta . \cos\varphi \qquad y = r \cos\vartheta \sin\varphi$$

$z = r \sin\vartheta$ einführen, die jene Bed. identisch in $\vartheta\ \varphi$ erfüllen. In der That wird man in den Anwendungen die Nebenbed^n meist durch solche unabh^e Para. $p_1 \cdots p_n$ auflösen. Man nennt sie wohl auch die n Freiheitsgrade der Sys. Sind keine Bed^n vorhanden, so ist $n = 3_n$ und die $x_1 \cdots z_n$ selbst können als Freiheitsgrade fungieren.

Die Bestimmung der Beweg kommt nun auf die Best. der n Fkt^n p heraus: wir werden die Diff glen für sie in sehr einfacher Weise aus dem Hamil. Prin. gewinnen:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = \text{Min. während } f_i = 0$$

Da die Nebenbed^n durch unsern Ansatz identisch befriedigt sind, bleibt ein absolutes Var. prob. zur Bestim der p übrig, wenn wir, wie es sogleich geschehen soll, den Integranden durch sie ausgedrückt haben.

Die Randwerte der p bei $t_1\ t_2$ sind bekannt da sie unsere Trans Gl^n (6') sofort aus dem

Neben bedn genüg Werten syst. t_1 $x_1^{(1)} \cdots z_n^{(1)}$ und t_2 $x_1^{(2)} \cdots z_n^{(2)}$ geben. Das als Fkt. von $x_1 \cdots z_n$ und ev. t bekannte Poten. U. wird vermöge (6') sofort zu einer bek^n Fkt. der p:

$$U = U(p_1, p_2 \cdots p_n\, t)$$

In T treten die Ableit^n x'_h auf: nun ist aus (6'):

$$x'_h = \frac{\partial x_h}{\partial p_1} p'_1 + \frac{\partial x_h}{\partial p_2} p'_2 + \cdots + \frac{\partial x_h}{\partial p_n} p'_n \text{ etc.} \qquad (6'')$$

wenn die Bed^n t nicht enthalten. Also wird:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} m_h \left(x'^2_h + y'^2_h + z'^2_h \right)$$

eine quadratische homogene Fkt. von $p'_1 \cdots p'_n$ deren Coeffizienten irgend welche Fkt^n von $p_1 \cdots p_n$ sein können; so hat z. B. p'^2_1 den Koeff^n

$$\sum_{h=1}^{n} m_h \left\{ \left(\frac{\partial x_h}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_h}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_h}{\partial p_1}\right)^2 \right\}$$

natürlich werden im allg^n auch die gemischten Terme $p'_1 p'_2$ etc. auftreten. Die ursprünglichen rechtwinkligen Koord^n

sind also von den allg.^{n} dadurch ausgezeichnet, dass in ihnen Ableit.^{n} geschrieben die kinet. Ener. nur rein quadratische Terme mit konst.^{e} Koeff.^{n}, den Massen, enthält; auf diese einfache Gestalt verzichten wir jetzt. Enthalten die Bed.^{n} die Geschw. kt.^{n}, so ~~tritt~~ zu x'_h noch ein Glied $\frac{\partial x_h}{\partial t}$, das von den p' frei ist hinzu und T wird zu einer ~~unhomogenen~~ Fkt. der p', deren Koeff.^{n} ausser von den p jetzt auch von t abh.^{n} können. Allg. wollen wir für die kinet. Ener. in der Transformierten Gestalt das alte zeichen

$$T = T(p'_1 p'_2 \dots p'_n\, p_1\, p_2 \dots p_n\, t)$$

beibehalten. Führen wir nun die Lagra.^{e} Fkt.

$$L = (p'_1 \dots p'_n\, p_1 \dots p_n\, t)$$

ein so schreibt sich das Hamil. Prin.

$$\int_{t_1}^{t_2} L(p'_1 \dots p'_n\, p_1 \dots p_n\, t)\,.\,dt = \text{Min.}$$

wo $p_1 \dots p_n$ unabh. Fkt.^{n} mit gegebenen Randwerten sind. Die Bed.^{n} des Min. erhalten wir also direkt, in dem wir die Var. ablit.^{n} des Integl. Null setzen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_1'}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_1} = 0$$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{T} - \mathfrak{U} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_n'}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_n} = 0$$

und das sind die n Diff. Gln 2 Ordn. für die n Fktn p die sich auch bei direkter Rechnung aus den Lagran Gln ergeben müssten. man nennt sie Lagrange Gln 2 Art, und sie bestimmen mit Anfangs und Endort oder mit Anfangsort und geschw. kt. die Beweg. vollkommen. denn das sind jedesmal, wenn gemäss den m Bedn gegeben, gerade $2(3n-m) = 2n$ Bedn die gerade die $2n$ Integs konstn der Gln (7) festlegen. Es ist noch zu bemerken, dass hier $\mathfrak{L}$ noch keine beliebige Fkt. von $p_1' \,\text{---}\, p_n'$ ist, sondern das sie in einen homogenen quadratischen Summanden $\mathfrak{T}$ und einen von $p_1' \text{--} p_n'$ unabhängigen $\mathfrak{U}$ zerfällt; es sind also hier kinet. und poten. Ener. noch wohl zu scheiden. Es kann mitunter auch zweckmässig sein, mehr als n Param.

einzuführen, die dann nicht mehr unab. sind, sondern gewissen neuen, vielleicht einfacheren Neben bed$\underline{\text{n}}$ $f(p_1, \dots p_n p_{n+1}, t) = 0$ genügen. Dann kommt man durch genau die gleichen Betrachtungen auf ein Var. prob.

$$\int \mathfrak{L}(p_1', \dots p_n' p_{n+1}', p_1 \dots) \, dt = \text{Min}$$

mit den Neben bed. $f = 0$. Dann hat man statt (7) einfach die $n+1$ Lagra$\underline{\text{n}}$ Gl$\underline{\text{n}}$ von $\mathfrak{L} + \lambda f$ zu bilden, die dann mit $f = 0$ gerade zur Bestimmung der $n+2$ Unbekt$\underline{\text{n}}$ $p_1 \dots p_n p_{n+1} \lambda$ ausreichen.

§ 15 Methoden der Var. Rech.

Nach dem wir nun auch die Mechanik der Punktsyst$\underline{\text{e}}$ bis zur Aufstellung der Integr. prin$\underline{\text{e}}$ gefördert ~~worden~~ haben, müssen wir einige tiefer in die Var. Rech. eindringende Betracht$\underline{\text{n}}$ einschalten. Der wesent$\underline{\text{l}}$ Inhalt der Theorieen der höheren Mechanik ist nämlich unabh. davon, dass die Lagra$\underline{\text{n}}$ Fkt. $\mathfrak{L}$ gerade jene besondere Gestalt hat (quadratisch in den Geschwin. Kt$\underline{\text{n}}$ ist) er gilt auch noch, wenn man statt des Hamil. Prinz. irgend ein Var. prob.

mit beliebigen Integranden zu Grunde
legt; die Beschränkung auf die besondere
Gestalt von L bietet daher für die allge.
Behandlung nicht nur keine Vorteile,
sondern sie zieht unnötig das Verständnis
der richtigen Zusammenhänge erschwer-
ende Umständlichkeiten nach sich.
Ich will nun die Sätze der Var. Rech. auf
dieser ankommt, immer in möglichster
einfacher Gestalt darlegen so dass ihr
wesentl. Inhalt klar zu Tage tritt:
die Beweise werde ich freilich der Zeit-
ersparnis halber nicht immer vollkommen
ausführen können. Ich verweise dafür
wieder auf meine eingehende Vorlesung
vom W.-S. 1904/5, deren Heft auf dem
Lesezimmer ausliegt, sowie insbesondere
auf meine Arbeiten "Math. Probleme"
Vortrag auf dem Pariser inter. Kong.
1900; abgedruckt: Gött. Nach. 1900,
p. 292. Archiv. Math. III (1901) p. 232
zur Var. Rech. Gött. Nach. 1905 p. 160.
Math. Ann.
Wir wollen im folgenden die Bezeich-

ungen der Var.-Rech. und den in ihr üb-
lichen geometr. Deutungen anpassen:
die unabh. Variable wird x heissen
(bisher die Zeit t) die unbek. Fkt.
werden $y(x)$ $z(x)$ genannt werden und
wir wieder aus die Verhältnisse in der
$x-y$ Eb. bezw. dem $x-y-z$ Raume
veranschaulichen. Zur Einführung
werde ich noch ganz kurz auf das Prob.
mit 1 unbek. Fkt. eingehen, ausführ-
lichen wird als dann der Fall zweier
Fkt. zu betrachten sein, wo einige wich-
tige Umstände neu eintreten, wo aber
andererseits alles zur vollen Allgemein-
heit (belieb. viele Unbek.) nötig erreicht ist.
Das einfachste Prob. ist (vgl § 11 Nr 2: L, 91) Es soll eine Fkt. $y = y(x)$ bestimmt
werden, die im Vergleich zu allen dieselben
gegebenen Randwerte

$$y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2$$

besitzenden Fkt. das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y' \, y \, x)\, dx = \text{Ulim.} \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

macht. Wir sahen dass diese Fkt. notwendig der Gl. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

genügt, und zählten auch ohne Beweis die hinreich. Bed.n des Min. bei schwacher Var. auf. Die Ableit dieser hinreich. Criterien führt erst auf die Kernfragen der Var. rech. zumal sie auf die allseitigen Beziehungen zu andern Disciplinen der Analysis führen. Da tritt insbesondere der Umstand auf, dass jene Lagrange Diff. gl. 2 Ord. die allg.ste Diff. gl. dieser Art

$$G(y'' y' y x) = 0$$

ist, von der sie sich nur in der Form auszeichnet; diese Form jedoch d. h. die Kenntnis eines Var. probl. aus dem eine vorgelegte Gl. $G(y'' y' y x) = 0$ entspringt, bietet gewisse beträchtliche Vorteile für die Theorie und Integration dieser Gl. Andererseits wird man naturgemäss auf eine partielle Diff. gl. 1 Ord. geführt, die mit jener gewöhnlichen Diff. gl. in engstem Zusammenhang steht. An die Spitze dieser ganzen „Theorie stellt man am besten den „Unabhängigkeitssatz", den ich in den

"Math. Probl." zuerst ausgesprochen habe: ich will ihn hier nur angeben, während ich erst bei dem allgemeineren Probl. näher besprechen will, wie man auf ihn naturgemäss kommt und wie man ihn beweist. Man betrachte das Integral

$$F = \int_{x_1 | y_1}^{x_2 | y_2} \left\{ F(p\, y : x) + \left(\frac{dy}{dx} - p\right) F_p \right\} dx$$

$$F_p = \frac{\partial F(p\, y)}{\partial p}$$

wo $p = p(x y)$ als eine Fkt. dieser beiden Variabeln d. h. als eine Belegung der x-y Eb. (p Feld) gedacht ist, so oft man dann $y = y(x)$ d. h. eine Integrationskurve in diesem Felde wählt die die Pkte $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$ verbindet, erhält J einen bestimmten Wert. Kann man nun $p = p(x y)$ so wählen, dass dieser Wert von Integrationswege unabh. wird und allein von den Grenzen $(y_1 | x_1)$ $(y_2 | x_2)$ abhängt (?) Auf diese Weise giebt mein Th. die Antwort: Man greife auf den zweiparametrigen Schaar der Integralkurven der Lagrange Gl.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

irgend eine einparametrige heraus, die im Gebiet der Ebene einfach überdeckt: bestimmt man dort in jedem Pkt. xy die Richtung $\frac{dy}{dx}$ der durch ihn gehenden Curve der Schaar als Fkt. $p(xy)$ des Ortes, so ist das eine Fkt. der verlangten Beschaffenheit, und zwar die allgemeinste.
Wir wenden uns nun sogleich zu dem allgemeinen Probl.: Es soll unter allen Fktn paaren $y(x)$ $z(x)$ die für $x = x_1\, x_2$ die gegebenen Randwerte

$$y(x_1) = y_1 \qquad z(x_1) = z_1$$
$$y(x_2) = y_2 \qquad z(x_2) = z_2 \qquad | \underline{a}$$

haben, dasjenige gefunden werden das, das Integl

$$\int_{x_1}^{x_2} F(y', z', y, z, x)\, dx \qquad y' = \frac{dy}{dx} \quad z' = \frac{dz}{dx}$$

zum Min. macht. F ist eine bekannte Fkt. seiner 5-Argumente und $y' z'$ stehen lediglich zur Abkürzung für die Ableitn nach x. Da jedes Fktn paar $y(x)$ $z(x)$ eine Curve $x-y-z$ Raumes darstellt können wir auch nach der die Punkte $1(x_1|y_1|z_1)$

und $2(x_2|y_2|z_2)$ verbindenden Raum Curve fragen, die das Integral gegenüber allen andern Curvenzügen. diesen beiden Punkten zum Minimum macht. Unser früherer Ansatz des Verschwindens der 1 Variation (§ 11 p. 128) ergab die folgenden beiden Lagran. Diff. gl. 2 Ord. für die Min. Fktn

(2) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

d. h. die Var. ableitn. des Integls müssen für die Min. Fkt. verschwinden. Um auf Analogieen mit bekannten Disciplinen hinzuweisen, will ich das Integl (1) erstreckt längs einer beliebigen Curve $y(x)$ $z(x)$ durch 1 bis zu einem variabeln Endpkte. $x / y(x)\ z(x)$ betrachten:

$$j(x) = \int_{x_1}^{x} F(y'z'y\,z\,x)\,dx$$

wir haben also dann 3 Fktn $y(x)$ $z(x)$ $j(x)$ die durch eine Diff. gl.

$$j' = F(y'z'y\,z\,x)$$

verbunden sind und wir können jetzt die Theorie unseres Var. probs auch auffassen

als Th. dieser unter bestimmten Syst.
einer Diff. gl. für 3 Fktn. Dem ent-
spricht in der Algebra – wenn wir uns
der Einfachheit halber die zweite Fkt.
$z(x)$ wegdenken – die Betrachtung
einer algebraischen Fkt. j der Grösse y

$$j = \varphi(y)$$

und die Frage ~~warum~~ wann j ein Max. oder
Min. wird. Als Notwend. Bed. ergiebt
sich da das Verschwinden der Ableit.
$\frac{dj}{dy} = 0$, das also die genaue Analogie
zu dem Verschwinden der Var. ableit (3)
bildet. Betrachtet man nun umge-
kehrt y als Fkt. von j so fallen
an der Minimalstelle 2 Werte der
im Allgm mehrdeutigen Fkt $y(j)$
zusammen, sie ist eine Verzweigungs-
stelle: diese Verzw. pkte,
die man so durch ein Minimal
Prob. erhält, spielen in der
Theorie der al. Fktn bekanntlich
eine centrale Rolle. Eine der
wichtigsten Fragen der Zahlen-
theorie, die aus ähnlichen Gesichtspunkten

betrachtet werden kann, ist die nach der Zerlegung der Discriminante einer quad. Form in Primfaktoren. Der Unterschied der Var Rech. gegenüber diesen Betrachtungen, der zugleich ihre Schwierigkeit ausmacht, besteht darin, dass wir statt Beziehungen zwis. Grössen, Beziehungen zwis. Fktn studieren, d. h. die Fktn, die Algebra und Fktn ~~theorie~~ durch ihre Betrachtungen über Grössen liefern, ihrerseits als Individuen zu Grunde legen, Der Ausgangspunkt ist eine Minimalforderung für eine Fkt. von Fktn; im einfachsten Falle ein bestimmtes Integral, genau wie die Diff. Rech. historisch von Min. Fordn für Fktn von Grössen ihren Ausgang genommen hat. Wie aber hier die Entwickelung zur Betrachtung allgen Beziehung zwis. Grössen führte und die Min. Probe nur ein specielles Kapital der Ganzen Th. wurden, so muss auch die Var. Rech. schliesslich zur Theorie allgn Beziehungen zwis. Fktn werden, wenn sie auch die Min. Probe als Grundlage noch lange im Auge behalten müssen wird. Für eine solche unterbestimmte Gl. zwis Fktn wie wir sie oben dem

Integral zuordneten

$$j' = F(y'\ y\ x)$$

wird man nun analog den Verzweigungs-pkt$\underline{n}$ des al. Gebildes von Verz.-gebilden reden können; während aber dort $\frac{dj}{F'} = 0$ ~~und~~ endlich viele Verz. pkte ergab, wird hier analog das Verz.-gebilde durch das Verschwinden der Var. ableit$\underline{n}$ definiert sein, und wird daher aus einer unendlichen Schaar von Fkt$\underline{n}$ bezw. Curven bestehen. Man kann sich nun auch weiter die Aufgabe stellen, die Gesamtheit der gleichzeitigen Lösungen $y(x)$ $j(x)$ der Gl. $j' = F(y'\ y\ x)$ zu beherrschen, etwa in eindeutiger Weise durch eine willkürliche Fkt. darzustellen: das entspricht genau der Aufgabe der Uniformisierung einer al. Gl. $g(x\,y) = 0$ d. h. der Darstellung aller gleichzeitigen Lösung$\underline{n}$ x, y als eindeutigen Fkt$\underline{n}$ eines Par., oder der zahlentheoretischen Aufgabe der ganzzahligen Lösung diophantischen Gl$\underline{n}$. Das sind alles Gesichtspkte. für die Auffassung der Var. Rech., auf

die ich hier hinweisen wollte.
Wir wollen nun zusehen, wie man bei der Behandlung des Var. Probl. (1) auf natürlichem Wege auf den Unabh. sätz. Satz geführt wird. Wie in der Diff. Rech. eine der ersten Fragen ist, unter welchen Umständen die Ableit. $\frac{df}{dy}$ identisch verschwindet, die im Allg. nur an endlich vielen Stellen des Max. und Min. verschwindet, so wird es hier auch naheliegen, zu untersuchen, wann die Var. ableitung eines Int. identisch verschwinden können. Die Diff. Rech. ergiebt da das triviale Resultat, dass f eine Konstante, keine eigentliche Fkt. von y ist, hier wird sich ein vom neuen Standpkte. aus ähnliches Resultat ergeben. Es sollen nun die Lagrange ~~Resultat ergeben~~ Gl. (2), die wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} z'' + \cdots = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} z'' + \cdots = 0$$

identisch d. h. für alle Fkt.paare

$y(x)$ $z(x)$ erfüllt . . sein. Das ist der Fall, wenn die linken Seiten identisch in den 7 Grössen $x\ y\ y'\ y''\ z\ z'\ z''$ verschwinden, und daraus folgt insbesondere, da $y''\ z''$ nur linear in den ersten beiden Gliedern auftreten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} = \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = 0$$

und das identisch in $x\ y\ z\ y'\ z'$. Also ist F eine lineare Fkt. von $y'\ z'$:

$$F = A(x\,y\,z) + B(x\,y\,z)\,y' + C(x\,y\,z)\,z'$$

und die Lagran Gln müssen lauten:

$$\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} y' + \frac{\partial B}{\partial z} z' - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} y' - \frac{\partial C}{\partial y} z' = 0$$

oder

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial B}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial y}\right) z' + \dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad \text{und ebenso} \\ \left(\dfrac{\partial B}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial y}\right) z' + \dfrac{\partial A}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Damit diese identisch bestehen, muss wiederum sein:

$$\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \qquad (a)$$

identisch in $x\ y\ z$. Auf diese 3 Gln reduciert sich also schliesslich die Bed.

identischen Verschwindens der Var. ableit.^{n}

Aus einer Gl. $\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0$ folgt nun aber bekanntlich die Existenz einer Fkt. von $x\,y$ deren Ableit.^{n} nach x, y, A und B sind: also ergiebt sich etwa aus den letzten beiden Gl.^{n} (a) die Existenz zweier Fkt.^{n} $\Phi(x\,y\,z)$ $\Psi(x\,y\,z)$ so dass

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$A = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad C = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

Aus den Ausdrücken für A ergiebt sich durch Subtraction dass $\Phi - \Psi$ von x unabhängig ist:

$$\Psi = \Phi + \varphi(y\,z) \qquad \text{also ist}$$

$$C = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und die dritte Gl (a) $\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ ergiebt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} = 0 \text{ identisch in } y\,z$$

also ist $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = Z(z)$ von y unabhängig und demnach hat

$$X(x\,y\,z) = \Phi(x\,y\,z) + Z(z)$$

denen Ableit. nach z C ist. A und B genau wie ϕ zu ableit$\overset{n}{}$ nach x y. Es folgt daher was ja auch ein oft angewendetes Theorem ist, aus den drei Gl$\overset{n}{}$ (a) die Existenz einer Fkt. $\chi(x\,y\,z)$ deren partielle Ableit$\overset{n}{}$ A, B, C sind, und daher ist unser Integral, von dem wir ausgingen

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x\,y\,z} F\,dx = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x\,y\,z} (A + By' + Cz')\,dx = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x\,y\,z} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\,y' + \frac{\partial \chi}{\partial z}\,z'\right) dx$$

$$= \chi(x\,y\,z) - \chi(x_1\,y_1\,z_1)$$

Verschwinden also die Var. ableit$\overset{n}{}$ eines Int$\overset{s}{}$ identisch, so stellt es einfach eine Fkt. der Endpkte. des Integrationsweges, also bei festen x_1, y_1, z_1, eine reine Fkt. des Ortes $x/y/z$ dar: von dem speciell gewählten Int$\overset{s}{}$-wege ist es unabhängig, es ist keine Fkt. von Fkt$\overset{n}{}$ mehr, wie das allgem$\overset{e}{}$ Int. $\int_{x}^{x_2} F(y'z')\,dx$ sondern eine Ausartung dieses Begriffs, eine einfache Ortsfkt.. Wir haben hier also das genaue Analogon dazu, dass eine Fkt. bei identischem Verschwinden

2 = 1

ihrer Ableitn im gewöhnlichen Sinne in eine konstante ausartet. Übrigens ergiebt sich sofort auch umgekehrt, das ein vom Wege unabhänge in eine Ort degenerierendes Int. identisch verschwindende Var. ableitn hat, denn die Koeffn A B C seines Integranden müssen als partielle Ableitn derselben ... den Gln (a) genügen.

Nach diesen Bemerkungen die wegen ihrer Analogie zur elementaren Diff. Rech., die nirgends genug betont sind, interessant sind, und die wir bald anwenden werden, wenden wir uns unserm ursprünglichen Var. prob. zu:

(1) $$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} F(y' z' y z x)\, dx = \text{Min}$$

und bringen jetzt die Frage nach aequiv. Var. probn heran, d. h. solcher, die dieselben Gln (2) liefern; auf die allge Bedeutung dieser Frage wurde bei der Beziehung zwis. Hamil. und Euler'schen Prin. die ja aequiv. sind, schon hingewiesen. In (1) stehen $y' z'$ lediglich als Abkürzungen für die Diff. quotn von y z. Es liegt nun nahe, sie als neue

~~Auswertung dieses Begriffs, eine einfache Ortsfläche. wir haben hier also das genaue Analogon dazu dass eine Fläche bei identischen~~ Unbekannte zu betrachten, die freilich dann mit $y\ z$ durch die Gl^n

$$p = \frac{dy}{dx} \quad q = \frac{dz}{dx}$$

verbunden sein würden; wir bekommen dann statt (1) das folgende Var. prob. mit 4 Unbek^n und 2 Nebenbed^n

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} F(p\, q\, y\, z\, x)\, dx = \text{Min. während } p = y', \qquad \text{(I)}$$

$q = z'$ wo die Randwerte nur von $y\ z$ gegeb. sind; dies Prob. hat also einerseits eine kompliciertere Form als (1) andrerseits ist es aber einfacher, da im Int^e selbst keine Ableit^n, in den Nebenbed^n diese nur linear auftreten. Es ist allg^n Überlegung über diese Umformung zu erwarten, dass dies neue Var. Prob. mit dem alten als identisch sich erweist. In der That finden wir auch dieselben Gl^n wieder, wenn wir es mit der alten Lagra^n Faktoren Methode behandeln.

Wir haben danach die 4 Var. ableitungen von

$$F^* = F(p\,q\,x\,y\,z) + \lambda(y'-p) + \mu(z'-q)$$

gleich Null zu setzen, und daraus und aus den Nebenbedingungen $y\ z\ p\ q\ \lambda$ zu bestimmen. Die Ableitungen für $p\ q$ lauten, da $p'\ q'$ nicht auftreten:

$$\frac{\partial F^*}{\partial p} \equiv F_p - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial F^*}{\partial q} \equiv F_q - \mu = 0$$

und die für $y\ z$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F^*}{\partial y} \equiv \frac{d\lambda}{d\,x^{(?)}} - F_y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F^*}{\partial z} \equiv \frac{d\mu}{\partial\,x^{(?)}} - F_z = 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich $\lambda = F_p \quad \mu = F_q$ ersetzen wir aus den Nebenbedingungen noch $y' = p \quad z' = q$ so ergeben sich für $y\ z$ in der That die richtigen Gleichungen

$$\frac{dF_p}{dx} - F_y = 0 \qquad \frac{dF_q}{dx} - F_z = 0$$

Der einfache Ausdruck der Lagrange'schen Faktoren $\lambda\ \mu$ führt auf den Gedanken,

(?) Mrs. Cairns thought that letter a "t".

nach ihrer Einsetzung das absolute Var. Prob. mit F^* als Integranden ohne Nebenbed^n zu handeln:

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left\{ F(p\, q\, y\, z\, x) + F_p (y' - p) + F_q (z_1 - q) \right\} dx = \text{Min} \quad \overline{\overline{\overline{(I)}}}$$

wo am Rande wieder nur die Werte von y z gegeben sind: diese Form hat die Vorzug $y' z'$ nur linear zu enthalten. Um nachzuweisen dass dies Prob. gleichfalls mit dem ursprünglichen aequiv. ist – und das ist nicht mehr ohne weiteres klar – bilden wir zunächst die Var. ableit^n nach $p\, q$:

$$F_p - F_p + F_{pp}(y_1 - p) + F_{pq}(z' - q) = 0 \text{ und}$$

ebenso $F_{pq}(y' - p) - F_{qq}(z_1 - q) = 0$

Wir machen nun die Annahme

$$F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 \neq 0$$

die mit der Theorie der Diff. Gl^n zusammenhängt, und die in der allg^n Th. der Var. Rech. stets gemacht wird; sonst treten ganz singulär Vorkommnisse ein. Unter diese Annahme folgt nur

255

aus den beiden letzten für $y'-p$, $z'-q$ linear homogenen Gl^n

$y' = p \qquad z' = q$

Dass die beiden andern Var. ableit^n nach $y\,z$ von $(\overline{\overline{I}})$ jetzt genau die alten Lagra^n Gl^n (2) für $y\,z$ ergeben, folgt genau wie beim vorigen Prob^e $(\overline{I})$, da wir ja jetzt auch $y' = p$ $z' = q$ haben und für die dortigen $\lambda\ \mu$ schon die richtigen Werte $F_p\ F_q$ eingesetzt sind.

Das Int. des letzten Var. Probe^s

(3) $$F^* = \int_{x_1}^{x_2} \{F(p\,q\,y\,z\,x) - F_p(y'-p) + F_q(z'-q)\}\,dx$$

enthält $y'\,z'$ linear und es liegt daher die Frage nahe ob es nicht unter Umständen überhaupt vom Int^{s}wege unabh. werden kann. Behalten wir $p\,q$ als Fkt^n von x bei, so kann das offenbar nicht eintreten, denn da verschwinden, wie wir soeben sahen, die Var. ableit^n nur für gewisse Fkt^n die sich aus den Lagra^n Gl^n ergeben. Mehr Erfolg können wir aber erwarten, wenn wir $p\,q$ nicht mehr als ~~un~~abhängige Fkt^n von x sondern als Fkt^n von $x\,y$ und z ansetzen, etwa

an eine Belegung des Raums mit 2 Fkt$\underline{n}$ p q denken. Dann entsteht die Frage: Wie muss man p q als Fkt$\underline{n}$ von $x\,y\,z$ wählen damit der Wert des Int$\underline{s}$ F^* von dem Int$\underline{s}$wege im x-y-z Raume d. h. der Wahl der Fkt$\underline{n}$ $y(x)$ $z(x)$ unabh. wird? Die Bed$\underline{n}$ dafür sind nach früheren Betrachtung$\underline{n}$ das ident$\underline{e}$ Verschwind. der Var. ableit$\underline{n}$ von F^*; die wahre Antwort auf unsere Frage die zugleich ihren tiefen zuerwartenden Zusammenhang mit unserm Var. Prob. enthält, liefert mein <u>unabh. Kte. satz</u>, der hier lautet

wir wählen eine beliebige Fläche $T(x\,y\,z) = 0$, und denken uns die Fkt$\underline{n}$ p q so auf ihr best. dass das Int. Ti^* auf irgend einer in der Fläche $T = 0$ gelegenen Curve zwis. zwei ihrer Pkte. erstreckt einen von der Wahl dieser Curve unabh$\underline{n}$ Werte erhält. Als dann legen wir durch jeden Pkt. P von $T = 0$ die Int. kurve der Lagra$\underline{n}$ Gl$\underline{n}$ (2)

$$\frac{d\,F(y')}{dx} - F_y = 0 \qquad \frac{d\,F_z}{dx} - F_z = 0$$

257

für die in P $y' = p$ $z' = q$ ausfällt, so dass eine zweiparametrige ein räumliches Feld erfüllende Schaar von Int.kurven entsteht. Wir denken uns durch jeden Pkt. dieses Feldes die hindurch gehende Int. kurve bestimmt, die Werte der Ableitgn y' z' in diesen Pkte. sind dann Fktn $p(xyz)$ $q(xyz)$ von der verlangten Beschaffenheit, und zwar die allg. sten.

Den Beweis dieses Satzes in einfacher und durchsichtiger Form findet man in meiner Note in den Gött. Nachr. 1905. ich kann hierauf Zeitmangel nur darauf verweisen. Wie man p q auf der Fläche T = 0 bestimmt, wird bald noch näher zu erläutern sein, es ist jedenfalls auf mannigfache Arten möglich, da man mit 2 Fktn nur die eine Bed. das Int. auf der Fläche (im zweidimensional Gebiete) vom Wege unabh. zu machen zu erfüllen hat.

Wir wollen nun mit Hilfe des unabh. kts. satzes auf die Theorie

der E-Fkt^n kommen und die hinreiche Kriterien des Min. ablei[te]t E seien $\overline{C}$.

$$y = \overline{y}(x) \qquad z = \overline{z}(x)$$

die Int. kurve der Lagra^n Gl^n, die die gegebenen Pkte $A(x_1|y_1|z_1)$ $B(x_2|y_2|z_2)$ verbindet; wir wollen wissen, ob sie das Int.

$$F = \int_{x_1}^{x_2} F(y' z' y z x)\,dx$$

wirklich zum Min. macht. Zu diesem Zwecke konstruieren wir uns eine zweier par. trige Extremalenschaar, die ein Unabh. kte. feld liefert, so dass $\overline{C}$ selbst in ihr enthalten ist. Die einfachste Art ein solches Feld zu konstruieren ist die, dass wir die Fläche $T = 0$ auf den Pkt. A zusammenziehen: dann ist in der Wahl von f g nichts mehr willkürlich, die auf dieser Fläche ausgearteten von einem Weg Int. nicht mehr die Rede ist, sondern die durch A gehenden ∞^2 Int. kurven der Lagra^n Gl^n bilden bereits die fragliche Extremalenschaar, zu der auch unser $\overline{C}$ gehört;

C
$\overline{C}$
B
A

die Richtungen $p(xyz)$ $q(xyz)$ der durch jeden Pkt. $x|y|z$ gehenden Curve machen unser Int. F^* vom Wege unabh.. Legen wir nun irgend eine Vergleichskurve $\mathfrak{C}$ $[y = y(x) \quad z = z(x)]$ von A nach B, so muss F^* auf $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ erstrecht gleichen Wert haben.

$$\int_A^B \{F(p\,q) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q\}\,dx = \Big|_{\substack{y=y(x)\\ z=z(x)}}$$

$$\int_A^B F(\bar{y}'\,\bar{z}'\,\bar{y}\,\bar{z}\,x)\,dx;$$

das Unabh. bte. Int. auf $\overline{\mathfrak{C}}$ vereinfacht sich das Unabh. bte. Int. auf $\overline{\mathfrak{C}}$ in dieser Weise, da ja länge dieser Curve wegen ihrer Zugehörigkeit zum Felde $\bar{y}' = p(x\bar{y}\bar{z})$ $\bar{z} = q(x\bar{y}\bar{z})$ ist; es geht also einfach in den Wert von F für $\overline{\mathfrak{C}}$ über. Nach der letzten Formel können wir nun also die Differenz der Werte des Ursprüngl. Int. F für $\overline{\mathfrak{C}}$ und $\mathfrak{C}$ durch folg. Int. über $\mathfrak{C}$ darstellen:

$$\int_A^B F(y'z'yz)\,dx - \int_A^B F(\bar{y}'\bar{z}'\bar{y}\bar{z})\,dx = \int_A^B \mathcal{E}(y'z'pq)\,dx$$

wo nach Weierstrass mit $\mathcal{E}$ bezeichnet wird:

(4) $$\mathcal{E}(y'z'pq) = F(y'z') - F(pq) - (y'-p)F_p - (z'-q)F_q$$

hier sind unter $p\,q$ die Werte der Feld Fkt^{n} an der Stelle $x|y|z$ unter $y'\,z'$ die (willkürl.) Richtung der Vergleichskurve C verstanden. Damit $\mathfrak{E}$ wirklich ein Min giebt, muss für jedes C jene Differenz positiv sein, und das wird jedenfalls der Fall sein, wenn diese Weierstrass'sche $\mathcal{E}$ identisch in $y'z'\,y\,z\,x$ positiv ist, d. h. im ganzen Felde und für jede Richtung. Damit haben wir jedenfalls eine hinreich. Bed. aus ihr auch in diesem allg-sten Falle das notw. herauszuziehen, darauf kommt es uns nicht an. Nur den Fall schwacher Var. wollen wir wieder genauer verfolgen, d. h. den Fall der Beschränkung auf solche Vergleich-kurven C, bei denen $y'\,z'\,y\,z$ resp. nur beliebig wenig von $\bar{y}'\,\bar{z}'\,\bar{y}\,z'$ abweicht. Dann werden wegen der Stetigkeit von $p\,q$ $y'\,z'$ auch von den an $(x|y|z)$ herrschenden Werten $p\,q$ hinreich. wenig abweichen, und wenn wir $F(y'z') - F(p\,q)$ nach Taylor in eine Potenzreihe nach $y'-p$, $z'-q$ entwickeln erhalten wir folgende Potenzentwickelung der $\mathcal{E}$ Fkt.

$$\mathcal{E}(y'z'p\,q) = \frac{1}{2}\Big[(y'-p)^2 F_{pp} + 2(y'-p)(z'-q) F_{pq} + (z'-q)^2 F_{qq}\Big] + \dots$$

und damit das für genügend kleine $y'-p$, $z'-g$ positiv ist, ist offenbar notwendig und hinr. dass die quad. Glieder eine positiv definite quad. Form bilden.

(4)' $$u^2 F_{pp} + 2uv\, F_{pg} + v^2 F_{gg} > 0$$

identisch in $u\, v$. Das muss zunächst noch im ganzen Felde in der Umgegend von $\bar{C}$ gelten aus Stetigkeitsgründen können wir die Forderung aber auch auf $\bar{C}$ selbst beschränken, wo dann $p = \bar{y}'$ $g = \bar{z}'$ zu nehmen ist. Das ist das Legendre'sche Criterium das natürlich schon in den ersten Zeiten der Var. Rech. bekannt war. Hat man eine den Lagrange Gl. genügende Extremale, so ist sie sicher dann wirklich Min. kurve, wenn längs ihr jene quad. Form definit positiv ist. Wir können das auch in die beiden Bed. für die Koeff. umsetzen:

$$F_{pp} > 0, \quad F_{pp}F_{gg} - F_{pg}^2 > 0 \qquad p = \bar{y}',\ g = \bar{z}'$$

(4'') Es ist zweckmässig bei allen diesen allg. Erörterungen an ein bestimmtes Beisp. zu denken; es empfiehlt sich dazu das sehr einfache Prob. $\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx = \text{Min.}$ der kürzesten Linie zwis. 2 Pkt. Die Lagrange Gl. sind $y'' = 0$ $z'' = 0$ haben

also alle Geraden des Raumes zu Lös $\underline{n}$.
Ein Feld wie wir so zuletzt verwendeten, wird durch das Strahlenbündel durch A dargestellt. Man überzeugt sich leicht, dass das Legendresche Criterium erfüllt ist, die Geraden also wirkliche kürzeste Linien sind.

Wir haben bisher stets als selbstverständlich angenommen, dass sich nun die fragliche Extremalenschaar, die wir konstru., den Raum auch wirklich einfach überdeckt. Man sieht leicht dass diese Annahme immer berechtigt ist, wenn A B genügend nahe aneinander liegen: sonst kommt man von hier aus zu den Jacobischen Criterien des Min., auf die wir hier aber nicht einzugehen brauchen.

Ich will jetzt eine Bemerk. über die Bestimm. von $p\, q$ auf der Fläche $T = 0$ einschalten, wenn man diese nicht speziell als Flkt. nimmt. Eine beson. wichtige Art der Bestimmung ist dann die, dass man $p\, q$ aus der Propor.

$$(F - p\, F_p - q\, F_q) : F_p : F_q = \frac{\partial T}{\partial x} : \frac{\partial T}{\partial y} : \frac{\partial T}{\partial z} \qquad (5')$$

für $T(x\,y\,z) = 0$ bestimmt, die e $\mathfrak{S}\,\ell\, \underline{n}$ darstellt und $p\, q$ auf der Fläche $T(x\,y\,z) = 0$ als Flkt. des Ortes bestimmt. Der Wert von F^* auf irgend einem Wege 1, 2 in der

Fläche ist dann, wenn M den Proportionalitäts faktor bedeutet.

$$\int_1^2 M\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}y' + \frac{\partial T}{\partial z}z'\right)dx$$

und da für jeden Weg auf der Fläche $T = 0$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}y' + \frac{\partial T}{\partial z}z' = 0$$ ist, ist jedenfalls $F^* = 0$. Unsere Bestimmung von $p\ q$ entspricht also dem allg.^{n} Verfahren, denn F^* hat für Wege auf $T = 0$ einen vom Wege unabh.^{n} Wert ja sogar auch einen von den Endpkt.^{n} des Integrationsweges unabh.^{n} Werten Null. Dieses einfachste Verfahren zur Bestim. von $p\ q$ will ich bald zur Lösung eines etwas anderen Var. Prob.^{s} benutzen: Eine Kurve von einer Fläche $T(xyz) = 0$ nach einem Pkte. B zu finden, die im Vergleich mit allen von B nach dieser Fläche gezogenen Curven ~~$\mathfrak{X}$~~

$$I = \int_{T=0}^{B} F(y'z'yzx)\,dx$$ zum Min. macht. Ich werde unmittelbar aus dem Unabh. Sats.satze zeigen, dass diejenige durch B gehenden Int. kurven in der That im all.^{n} gerade eine bestimmten werden. Zum Beweise verwende ich gerade das in jener speciellen Weise zu $T = 0$ konstruierte Feld, d. h. ich bestimme $p\ q$ gemäss (5–)

in jedem Pkte. von $T = 0$ und lege durch ihn die Extremale mit $p\ q$ als Ableitgn. Zu dieser Schaar wird für den Pkt A der Fläche auch unser $\bar{C}$ gehören, denn gerade diesen Bed (5') sollten ja seine Ableitgn $y'\ z'$ in A genügen. Für das so best. Feld ist also F^* vom Wege unabh.. Legen wir eine beliebige Curve C durch B, die $T = 0$ in A^* trifft, und verbinden A^* mit A' durch irgend einen Weg auf der Fläche, so erhält I auf $A^* A \bar{C}$ B.. Auf $A^* A$ verschwindet es aber wegen der speziellen Best. von $p\ q$ auf der Fläche: also erhalten wir, da auf $\bar{C}$ $p = \bar{y}'$ $q = \bar{z}'$ ist:

$$\int_{A^*}^{B} \{F(p\,q) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q\}\,dx = \int_A^B F(\bar{y}'\,\bar{z}')\,dx$$

und daraus können wir genau wie oben schliessen:

$$\int_{A^*}^{B} F(y'\,z'\,y\,z)\,dx - \int_A^B F(\bar{y}'\,\bar{z}'\,\bar{y}\,\bar{z})\,dx = \int_{A^*}^{B} \mathcal{E}(y'\,z'\ p\,q)\,dx$$

und unter den richtigen Voraussetzung über die $\mathcal{E}$-Fkt, ergiebt sich in der Tat wieder dass die Differenz stets pos. also $\bar{C}$ wirklich Min. kurve ist. Denken wir an das

Beispiel der kürzesten Linien, so deutet unsere Randbed. für $\bar{C}$ am Schnitte mit der Fläche nichts als dass die Min. kurve, die eine Gerade ist senkrecht auf $T = 0$ steht, wie man leicht ausrechnet.

Wir wenden uns nun zu dem für die Mech. sehr wichtigen Fall, dass der Integrand F_H Unstetigkeiten annehmen, dass er längs einer gegeb. Fläche

$$U(x\,y\,z) = 0$$

etwa einen endlichen Sprung erleide, auf beiden Seiten 1 2 aber, bis an $U = 0$ heran, eine anal. Fkt. von $y'\,z'\,y\,z\,x$ sei; insbesondere können für F. in beiden Teilräumen 1 2 ganz verschiedene anal. Fktn 1 2 gegeben sein. Die Aufgabe ist, zwei auf verschiedenen Seiten gelegenen Punkte A B durch eine Curve zu verbinden, die das Int. $F = \int_A^B F(y'\,z'\,y\,z\,x)\,dx$ zum Min. macht. Als Beisp. kann man etwa an die kürzeste Verbindung zwis. A B denken, wenn auf der Seite 2 die Länge doppelt so gross als gewöhnlich gezählt wird. Durchsetzt die Min. kurve die Unstetigkeitsfläche bei P, so ist leicht klar dass jeder Teil AP, PB den Lagrangeschen Gln des betr. Ausdrucks F genügen muss; bei P aber wird man im allgn keinen stetigen Übergang dieser Curven ineinander zu erwarten haben, sondern die werden unter ein-

gend einen Winkel aneinanderstossen, so dass P ein Knickpkt der ganzen Min. kurve wird. Die wesentl. Aufgabe ist das hierbei stattfindende "Brechungsgesetz", d. h. die Beziehung zwis. den Richtungen mit denen die Zweige in P einmünden zu ermitteln: die Analogie mit der Optik ist augenfällig, da ergiebt sich der Lichtweg aus der Forderung dass ihn das Licht in kürzester Zeit zurücklegt, und da in verschiedenen Medien verschied. Geschwn herrschen, liegt beim Durchgang durch die Trennungsfläche genau unser Fall bei dem Strome ergeben, wo die Poten. Energ. eine sprunghafte Änderung erfährt. Der Unabh.satz wird uns nun unsere Frage in einfachster Weise erledigen. Gelingt es uns ein Feld mit unabh. Int. F^A zu konstru. dessen eine Extremale AB verbindet, so können wir in der bereits mehrfach angewandten Art schliessen, dass sie wirklich Min.kurve ist; denn für die Operation mit Integn machen die hier in Erscheinung tretenden Endlichen Sprünge gar keinen Unterschied aus. Zunächst konstru. wir auf der Seite der Fläche ein Feld, $p_1(xyz)$ $q_1(xyz)$ in gewöhnlicher Weise nach dem Unabh.satze indem wir etwa alle Extremalen durch A verwenden, oder auch nach dem allgemeinen Verfahren. Jede Extremale

kommt mit einer best. Richtung p. q. r der Fläche $U = 0$ an. ein Gebiete 2 wird in jedem Pkte. von U eine neue Integr. R. der Lagrange'schen Gl'n in 2 ansetzen; und deren Richtgn. $p_2(x\,y\,z)$ $q_2(x\,y\,z)$ in jedem Pkte. in 2 werden die Fortsetzung des Feldes bilden. In dem ganzen so gebildeten Felde soll F^* vom Wege unabh. sein. Nehmen wir also irgend 2 Pkte. C D auf $U = 0$ und verbinden sie mit A B so muss sein:

$$\int_A^C [F(p\,q) + \dots] dx + \int_C^B [F(p_2\,q_2) + \dots] dx$$

$$= \int_A^D [F(p_1\,q_1) + \dots] dx + \int_D^B [F(p_2\,q_2) + \dots] dx$$

jedesmal ist der bekannte Integrand der Unabh. Int. zu ergänzen, immer in den angedeuteten Argumenten. Ziehen wir jetzt irgend einen Weg CD auf der Unstetigkeitsfläche $U = 0$ und bezeichnen mit F_1 F_2 die Fkt'n in die $F(p\,q\,y\,z\,x)$ übergeht, wenn man sich von der Seite 1 bezw. 2 der Fläche $U = 0$ nähert. Indem wir den Unabh. satz einmal auf die Wege A C D und A D, dann auf C B und C D B anwenden erhalten wir:

$$\int_A^C [F(p_1\,q_1) + \dots] dx + \int_C^D [F_1(p_1\,q_1) + \dots] dx =$$

$$\int_A^D [F(p_1\,q_1) + \dots] dx$$

$$\int_C^B [F(p_2\,q_2) + \dots] dx = \int_C^D [F_2(p_2\,q_2) + \dots] dx + \int_D^B [F(p_2\,q_2) + \dots] dx$$

Indem wir die erste Gl. von der Summe der zweiten und dritten subtrahieren, finden wir:

$$\int_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{D}} [F_1(h_1 g_1) + \dots] dx = \int^{\mathfrak{D}} [F_2(h_2 g_2) + \dots] dx$$

und da die Pkte. $\mathfrak{C}$ $\mathfrak{D}$ willkür. auf $U = 0$ liegen, folgt Übereinstimmung der Integranden:

$$F_1(h_1 g_1) + (y' - h_1) F_{h_1} + (z' - g_1) F_{g_1} = F_2(h_2 g_2) + (y' - h_2) F_{h_2} + (z' - g_2) F_{g_2} \quad (6\,\tfrac{a}{?})$$

und das muss für jede Curve auf $U = 0$ gelten d. h. für jedes der Gl.

$$U_x + U_y \cdot y' + U_z z' = 0$$

genügende Wertepaar y' z'. Elimination von y' z' giebt

$$\left.\begin{aligned} &(F_1 - h_1 F_{h_1} - g_1 F_{g_1} - F_2 + h_2 F_{h_2} + g_2 F_{g_2}) : F_{h_1} - F_{h_2} : \\ &F_{g_1} - F_{g_2} = U_x : U_y : U_z \quad \text{auf } U(x\,y\,z) = 0 \\ &\text{worin } F_1 = F_1(h_1 g_1 x y z) \quad F_{h_1} = \frac{\partial}{\partial h_1} F(h_1 g_1) \text{ etc.} \end{aligned}\right\} (6)$$

Diese Proport. enthält nun 2 Gl^n die in jedem Pkte. $x|y|z$ von $U = 0$ h_2 und g_2 durch h_1 g_1 ausdrucken, denn die F sind bekannte Ausdrücke in den h g x y z die Grenzwerte der unstetigen Fkt. F auf beiden Seiten von U. Wir haben so das allg^{ste} "Brechungsgesetz" gewonnen: es lehrt, wie wir das Feld in 1 nach 2 im allg^{en} unstetig fortzusetzen haben, indem es die Randwerte h_2 g_2 der Feld Fkt^n auf $U = 0$ giebt.

Konstru. wir die Extremalen in 2 mit diesen
Randwerten, so erhalten wir ein richtiges Unabh.
ktz. feld; denn das Int. F^* für einen Weg auf
$u = 0$ mit den Randw$^{\underline{n}}$ $p_2 q_2$ gebildet ist
von Wegeunabh., da es nach ($6^{\underline{a}}$) gleich
dem entsprechenden auf der Seite 1 gebildeten
ist, und da wir ja dort bereits ein Unabh.
ktz. feld hatten. Dass nun F^* auch für jeden
$u = 0$ durchsetzenden Wegunabh. ist, ergiebt
sich unmittelbar aus unserer Ableit.,
und daraus folgt dann in bekannter Weise,
dass unsere Extremalen wirklich Min.
kurven sind. Die richtige A mit B verbind-
ende Min. ~~kurve~~ kann man nun sofort
dadurch finden, dass man die Schaar der
Int. k$^{\underline{n}}$ durch A legt, sie bei u nach
dem Brechungsgesetz fortsetzt, und die
dann durch B gehende Curve bestimmt.
Wir können das Brechungsgesetz ge-
mäss ($6^{\underline{a}}$) übrigens auch kurz so aus-
sprechen, dass sich der Integrand des
Unabh. ktz. integrales für alle in der
Unstetigkts. fläche gelegenen Rich-
tungen stetig durch sie fortsetzt. Diese
Auseinandersetzung wird uns später
ohne weiteres die Impulstheorie
liefern.

A copy of part of the "Ausarbeitung" in Mechanik from page 346

Wir kommen nun zu der wichtigsten Anwendung des Unabhängigkeitsatzes, der bequemen Ableitung der Jacobi Hamiltonschen Theorie der dynamischen Differentialgleichungen. Wir stellen uns irgend ein Unabhängigkeitsfeld her, dessen Randwerte p, q an einer beliebig gegebenen Fläche $T(xyz) = 0$ wir in speciellen Weise durch die Gleichungen

(5) $(F - pF_p - qF_q) : F_p : F_q = T_x : T_y : T_z$

bestimmen. Dann hat E^* für einen Weg auf der Fläche $T=0$ den Wert 0, und es hat denselben Wert, wenn wir es von verschiedenen Punkten von $T=0$ an nach demselben Punkte x, y, z erstrecken. Daher definiert uns dieses Unabhängigkeitsintegral, dessen unterer Integrationsgrenzpunkt beliebig auf $T=0$ liegt eine ganz bestimmte Ortsfunction

(7) $$I(xyz) = \int_{T=0}^{x,y,z} \left\{ F(pqyzx) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q \right\} dx$$

die auf $T=0$ verschwindet. Ihre partiellen Ableitungen nach den 3 Koordinaten können wir aus dieser Integraldarstellung sofort ablesen:

$$(7a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} = F - p\,F_p - q\,F_q \\ \dfrac{\partial I}{\partial y} = F_p \\ \dfrac{\partial I}{\partial z} = F_q \end{cases}$$

und wenn wir aus den beiden letzten Gleichungen p, q durch I_y, I_z $x\,y\,z$ ausdrücken und in die erste einsetzen, erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für I

$$(7b)\quad \frac{\partial I}{\partial x} = H\left(\frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\ x, y, z\right)$$

die die Hamilton-Jacobische Gleichung heisst, und die allein noch von F, d. h. von dem Variationsprobleme abhängig und mit ihm gegeben ist; von der Fläche $T=0$ enthält sie nichts mehr, und ihr genügt daher auch das Un-

abhängigkeitsintegral in jedem irgendwie konstruierten Felde. Unser $I(xyz)$ ist aber special gerade die Lösung der partiellen Gleichung, die auf $T=0$ verschwindet, und die, wie die allgemeine Theorie lehrt, eindeutig bestimmt ist. Wir haben hier eine vollkommene Integrationsmethode der Gleichung (7b) durch Zurückführung auf gewöhnliche Gleichungen, die Lagrangeschen Gleichungen des Variationsproblemes. Zu jeder Lösung $I(xyz)$ nämlich bestimmen die Gleichungen (7(a)) ein p-q-Feld, sodass man wirklich die allgemeinste Lösung erhält, wenn man von dem allgemeinsten durch die willkürliche Fläche $T=0$ bestimmten Unabhängigkeitsfelde ausgeht, d.h. eine geeignete zweiparametrige Integralschaar der Lagrangeschen Gleichungen bestimmt;

damit kommt in der Tat auch eine willkürliche Funktion, nämlich T, in die Lösung der partiellen Gleichung hinein. Würde man auf $T=0$ p, q in der allgemeinsten Art des Unabhängigkeitsatzes, statt durch (5), bestimmen so erhielte man direkt die Lösung von (7b) die auf $T=0$ vorgegebene Randwerte (nicht speciell die 0) hat. Damit haben wir den tiefsten und schönsten Satz aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vollständig integriert werden kann; es fehlt nur noch der unschwer zu erbringende Nachweis, dass jede I selbst nicht enthaltende Gleichung

$$\Phi\left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}, x, y, z\right) = 0$$

als Gleichung (7b) eines geeigneten Variationsproblems aufgefasst werden kann; die Einschränkung, dass I selbst in der Gleichung nicht auf-

tritt, ist nicht sehr wesentlich. –
Das Integral $I(x,y z)$ ist nichts als der <u>Minimalwert</u> von $\int F(y'z'yz)dx$, wenn man (x,y,z) mit der Fläche $T=0$ verbinden will; man erkennt das sofort, wenn man das Integral längs der Feldextremale $y'=p$, $z'=q$ durch (x,y,z) erstreckt. Es spielt unter den verschiedensten Namen in den verschiedensten Theorien eine grosse Rolle: so ist es in der Theorie der geodätischen Linien die <u>geodätische</u> Entfernung, in der Optik das <u>Eikonal</u> (Lichtzeit), in der Mech. das Hamiltonsche Integral u.s.w.

Wir wollen nun statt der einen Fläche $T=0$ eine zweiparametrige Schaar von Flächen

$$T(x y z \; a b) = 0$$

zu Grunde legen; dann erhalten wir gleichfalls eine Schaar von ∞^2 Felden

$$p(xyz\,ab) \qquad q(xyz\,ab)$$

zu deren jedem eine durch das Unabhängigkeitsintegral dargestellte Funktion

$$I(xyz\,ab) = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} \left(F(pq) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q \right) dx$$

das Integral erstrecken wir von einem festen, von a, b unabhängigen Punkte $x_0\, y_0\, z_0$ an. Die Ableitungen dieser I nach a, b stellen neue Ortsfunctionen dar, für die wir durch Differentiation nach dem Parameter folgende Ausdrücke durch unabhängige Integrale erhalten:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_0^{xyz} \left\{ (F_{pp} p_a + F_{pq} q_a)(y'-p) + (F_{qp} p_a + F_{qq} q_a)(z'-q) \right\} dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \int_0^{xyz} \left\{ (F_{pp} p_b + F_{pq} q_b)(y'-p) + (F_{qp} p_b + F_{qq} q_b)(z'-q) \right\} dx$$

Die Differentialgleichungen

$$y' = p(xyz\,ab), \quad z' = q(xyz\,ab)$$

haben nun nach der Definition der p, q durchweg Integralkurven der Lagrangeschen Gleichungen zu Integralen;

da sie bereits 2 Konstante enthalten, werden sie im allgemeinen ein vollständiges erstes Integralsystem dieser sein, d.h. sämmtliche ∞^4 Lag. Curven zu Lösungen haben. Der Integrand der Integrale $\frac{\partial I}{\partial a}$, $\frac{\partial I}{\partial b}$ verschwindet nun für $y' = p$, $z' = q$, also haben diese Funktionen selbst auf den Integralkurven dieser Gleichungen je einen konstanten Wert, entsprechend dem Werte, den die Integration von dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ nach der betr. Curve heran gibt:

$$(8) \qquad \frac{\partial I(x y z a b)}{\partial a} = c \qquad \frac{\partial I(\quad)}{\partial b} = d.$$

und umgekehrt müssen für jeden diesen Gleichungen genügende Curve die beiden Integranden von $\frac{\partial I}{\partial a}$, $\frac{\partial I}{\partial b}$ verschwinden, also $y' = p$, $z' = q$ sein. Die Gleichungen (8) bestimmen also die Integralkurven von $y' = p$, $z' = q$ und

daher auch die Gesammtheit ∞^4 der Integralkurven der Lag. Gleichungen. Damit haben wir das wichtige Resultat, dass gerade die Umkehrung der obigen Integration der partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe der gewöhnlichen ist: Kennt man eine zweiparametrige Schaar von Integralen der Hamilton-Jacobischen partiellen Gleichung (76), so kann man in 8 die vollständigen Integrale der Lagrangeschen Gleichungen direkt angeben. Damit kann man dann übrigens auch wieder rückwärts sämmtliche Integrale der partiellen Dif. Gl. finden. Diese Bemerkung ist gerade für die wirkliche Durchführung der Integration in vielen Fällen von hoher Wichtigkeit, obwohl principiell interessanter die Erkenntnis der Möglichkeit ist, jede partielle Differentialgleichung 1. Ordn. durch gewöhnliche zu integrieren. Häufig

haben nämlich die Lagrangeschen Dif. gl. ~~eine~~ sehr komplicierte Form, während die partielle Dif. Gl. so einfach ist, dass man eine zweiparametrige Lösungsschaar von ihr leicht ganz direkt angeben kann; damit hat man dann also die vollständige Integration der Lag. Gl. geleistet, was direkt kaum möglich gewesen wäre. Auf diesem Wege hat in der Tat Jacobi bisher ungelöste Probleme, wie die Bestimmung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid und die Bewegung eines Punktes unter der Attraction zweier festen Massen, vollkommen gelöst. Man hat in diesen Problemen nur eine Unbekannte, und braucht daher sogar nur eine einpar. Schaar von Lösungen der partiellen Gleichung für $I = I(xy)$ zu kennen

Wir wollen nun wieder auf die frühere Fragestellung der Transformation von Variationsproblemen auf neue aequivalente zurückkommen;

sie wird uns jetzt zu neuen ~~aequiva-~~
~~lente zurückkommen~~ wichtigen Sätzen führen. Wir hatten gesehen, dass das ursprüngliche Variationsproblem:

$$(1) \qquad \int_{x_1 y_1 z_1}^{2} F(y' z' y z x)\, dx = \text{Min}$$

mit 2 Unbekannten aequiv. ist dem Var. prob. mit 4 unbekannten Fct.

$$(\bar{\bar{1}}) \qquad \int_1^2 \left\{ F(p q y z) + (y'-p) F_p + (z'-q) F_q \right\} dt = \text{Min}.$$

wenigstens was die Lag. Gl. anlangt, oder genauer: die Var. ableitungen beider Integrale verschwinden für die selben Fct. y, z. Es sei aber hier noch hinzugefügt, dass die Lösungen $p, q, y z$. der Lag. Dif. gl. das Int. $(\bar{\bar{1}})$ durchaus nicht wirklich zum Min. machen werden, auch wenn y, z das Integral (1) wirklich zum Min. machen; d. h. die hinreich. Beding., wie sie mehrfach aufgeführt wurden, erfüllen. Beschränkt man sich allerdings auf Vergleichsfunctionen,

die $y'=p$, $z'=q$ genügen, so wird auch $(\bar{\bar{I}})$ ein wirklicher Min. haben, da es sich da ja im Grunde nur ~~um~~ die Einführung andere Bezeichnungen in (1) handelt; sowie man aber neben willkür. $y(x)$, $z(x)$ auch willkürliche $p(x)$, $q(x)$ zum Vergleich zu lässt (Randbedingungen sind nur $y(x_1)=y_1$, $z(x_1)=z_1$ $y(x_2)=y_2$ $z(x_2)=z_2$), so zeigt eine einfache Überlegung auf Grund des Unab.-satzes, dass man $(\bar{\bar{I}})$ grösser und kleiner machen kann, als der durch die Lag. Fct. gegebene Wert; da diese aber die für ein Min. notwend. Beding. allein erfüllen, so haben wir hier sogar ein einfaches Beispiel für bestimmte Integrale, die überhaupt kein Min. haben. Ich brauche hier jedoch darauf nicht weiter einzugehen; für uns ist hier vorläufig nur wichtig, dass unsere Fct. die erste Var. des Int. $(\bar{\bar{I}})$ verschwinden lassen, d.h. dass sie die früher besprochene ausgezeichnete Stellung für die zugehörige Fct.-beziehung

$$j' = F(p q y z) + (y' - p) F_p + (z' - q) F_q$$

haben.

Wir wollen nun eine Transform. der 4 Fct. $p, q\; y z$ vornehmen, die man ~~am~~ passendsten als Legend. Trans. bezeichnet, während man sie in der Mechanik häufig kanonische oder Hamilton Trans. nennt. Es handelt sich aber hier um eine in den verschiedensten Gebieten der Analysis eine grosse Rolle spielende Umformung, für die oft von Forschern, die ihr früheres Vorkommen nicht kannten, neue Namen eingeführt worden sind. In der Algebra und Geom. ist sie ganz bekannt als Umformung einer in Punktkoordinaten dargestellten Fläche auf Ebenenkoordinaten; in der Lieschen Theorie finden wir sie als allgemeine Berührungstransformation wieder; in der Theorie der par. Diff. Gl. ist sie gleichfalls sehr wichtig, speciell bildet sie auch den eigentlichen Kern der Umformung in Riemanns hydrodynamischer Arbeit über Luftschwingungen von endlicher Ampli-

tude; als letztes Beispiel erwähne ich die Thermodynamik, in der sich sich beim Übergang von Entropie und Dichte zu Temperatur und Druck genau um die Legendresche Transformation handelt. – Hier liegt nun diese Legend. Trans. besonders nahe, sie besteht nämlich einfach darin, dass wir die 3 Koeffizienten der in y', z' linearen Integranden von $(\bar{\bar{I}})$;

$$(F - pF_p - qF_q) + F_p \cdot y' + F_q \cdot z'$$

als neue Funktionen einführen, das sind nach (7a) nichts als die Ableit. des Int.-wertes $I(xyz)$ nach den Koordinaten, genau gesagt, ist die Trans. der 4 Fct. y, z, p, q folgende: Wir lassen y, z ungeändert und führen statt p, q ein:

(9a) $\pi = F_p(p, q, y, z)$ $\quad$ $\kappa = F_q(p, q\, y\, z)$

und setzen ferner

(9b) $H(\pi, \kappa, y\, z) = F(p q\, y\, z) - p \cdot \pi - q \cdot \kappa$

wo für p, q in F die durch Auflösung aus (9a) sich ergebenden Ausdrücke in π, κ, y, z eingesetzt zu denken sind. Diese "Hamiltonsche Fct." $H(\pi\, \kappa\, y\, z)$

war uns schon oben bei der Herleitung der Jacobi-Hamiltonschen par. Dif. Gl. aus den Relationen (7b) begegnet; denn wenn wir da $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial y} = \pi$, $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial z} = \kappa$ ergibt sich in der Tat gerade

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} = F - p\pi - q\kappa = H(\pi \kappa y z) = H\left(\frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\, y, z\right)$$

als partielle Dif.gl. Durch diese Legend-Trans. geht nun das Int. $(\bar{\bar{I}})$ über in

$$(9) \qquad \int_1^2 (\pi y' + \kappa z' + H(\pi \kappa y z x))\, dx$$

und die zu den früheren Minimal fct. $y\, z\, p\, q$ gehörigen $y, z\, \pi\, \kappa$ bestimmen sich aus der Forderung des Verschwindens der Var. ableitungen dieses Integrales dass freilich ein wirkliches Min. wieder nicht haben wird. Dieses „kanonische Variationsprob. ist besonders einfach, da es die Ableitungen y', z' zweier Unbekannten nur mit je einer der beiden andern π, κ selbst multipliciert linear enthält, während dann eine additives Glied $H(\pi \kappa y z)$ charakteristisch für das einzelne Problem ist.

Die 4 Var. ableitungen des Integrales werden nun einfach, da π', κ' gar nicht auftreten:

$$\frac{d\pi}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d\kappa}{dt} - \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

$$y' + \frac{\partial H}{\partial \pi} = 0 \qquad z' + \frac{\partial H}{\partial \kappa} = 0$$

es sind also 4 Gleichungen 1. Ordn. sehr einfacher Form, aufgelöst nach den 4 Ableitungen, und sie sind für y, z den ursprünglichen 2 Lag. Gl. 2 Ordn.

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

aequivalent, da unser kanonisches Variationsproblem ja dem ursprünglichen (1), weil durch Trans. aus ihm entstanden, aequiv. ist. Man kann sie übrigens auch direkt durch die Leg. Trans. aus (2) und $y' = p$, $z' = q$ herleiten, während wir die Aequivalenz direkt ohne Rechnung aus Betrachtung der Var. prob. gewonnen haben. Diese kanonischen Dif. Gl., die man gewöhnlich schreibt

$$(10) \qquad \begin{cases} y' = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi}, & z' = -\dfrac{\partial H}{\partial \kappa} \\[2mm] \pi' = \dfrac{\partial H}{\partial y} & \kappa' = \dfrac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

werden in der höheren Mech. fast allein gebraucht. Diese merkwürdig symmetrischen und einfachen Gleichungen stellen sich, genau wie das zugehörige Var. Prob. (9) direkt durch die Fct. $H(\pi, \kappa, y\,z\,x)$ dar, die auch die Jacobische par. Dif. Gl. lieferte; diese ist wiederum durch einen einfachen Eliminationsprozess nach (9a), (9b) aus dem gegebenen $F(y'z'\,y\,z\,x)$ zu erhalten.

Wir verfolgen nun weiter die Frage der äquivalenten Var. prob. indem wir das kanonische Integral (9) zu Grunde legen. Transformieren wir jetzt alle 4 unbekannten Funktionen $\pi\,\kappa\,y\,z$ in allgemeinster Weise in neue Fct. Π, K, Y, Z indem wir setzen

$$\Pi = \Pi(\pi\,\kappa\,y\,z), \quad K = K(\pi\,\kappa\,y\,z)$$

$$Y = Y(\quad), \quad Z = Z(\quad)$$

unter Π -- Z gleichzeitig Fct.zeichen für gegebene Ausdrücke in $\pi\,\kappa\,y\,z$ verstanden –, so müssen wir ein dem alten aequiv. Var. prob. erhalten,

d.h. die Var. ableitungen nach Π-- Z des transformierten Int. gleich Null gesetzt sind die durch eben jene Transformation aus (10) entstehenden Gl. Es wird nun gefragt, wie die Trans. beschaffen sein muss, damit das neue aequivalente Var. prob. wieder die alte, die kanonische Gestalt hat:

$$\int_1^2 (\Pi Y' + K Z + \bar{H}(\Pi, K, Y\, Z_x) dx$$

wo $\bar{H}$ natürlich im allgemeinen eine andere Fct. als H sein wird; eine solche Trans. heist eine <u>kanonische</u>, und diese Trans. sind in der Mech. von höchster Bedeutung. Bevor wir uns der allgemeinen Fragestellung zuwenden, werden wir uns einer eigentümlichen einschränkenden Modification von ihr zu, die von <u>S. Lie</u> herrührt, und die die Grundlage seiner ganzen Theorie bildet. Wir begnügen uns nämlich nicht mit einer kanonischen Trans., sondern

wir werden bald gewisse spezielle <u>ein-parametrige Schaaren</u> solcher suchen. Eine kanonische Trans. kennen wir ohne weiteres, nämlich die Identität

$$\pi = \Pi, \ \kappa = K, \ y = Y \quad z = Z,$$

die ja gar nichts ändert. Wir suchen nun ein Schaar

$$\Pi = \Pi(\pi \kappa y z \alpha), \qquad K = K(\pi \kappa y z \alpha)$$
$$Y = Y(\pi \kappa y z \alpha), \qquad Z = Z(\pi \kappa y z \alpha)$$

solcher Trans., abhängig von dem Par. α, sodass für jedes α das Prob. wieder in ein kanonisches übergeführt wird. Das wesentlichste aber ist, dass wir von dieser Schaar jetzt die <u>Gruppen-eigenschaft</u> verlangen; nimmt man irgend 2 Trans. der Schaar für $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ heraus, so soll ihre Aufeinanderfolge wieder eine Trans. der Schaar, etwa für $\alpha = \alpha_3$, sein, wo α_3 als Funktion von α_1, α_2 bestimmt ist. Ausserdem wird verlangt dass die Schaar die

identische Trans., etwa für $\alpha = 0$ enthält; man nennt sie dann nach Lie eine kontinuierliche einparametrige (eingliedrige) Transformationsgruppe.

Ich kann nun hier die Lieschen Sätze über solche Gruppen nur kurz ohne Beweis darlegen. Es fragt sich zunächst, wie man überhaupt Gruppen von Trans. erhält, dann erst wird zu fragen sein, wann eine solche Gruppe aus kanonischen Trans. bestehen wird. Was zunächst die erste Frage anlangt so denken wir uns $\pi \cdots z$ als Funktion von $\Pi \cdots Z$ dargestellt und nach Potenzen von α entwickelt (es können natürlich hier nur analytische Fct. in Betracht):

$$(T_\alpha)\begin{cases} \pi = \Pi + \alpha\, p(\Pi \cdots Z) + \alpha^2(\cdots) = \pi(\Pi \cdots Z, \alpha) \\ \kappa = K + \alpha\, k(\cdots) + \alpha^2(\cdots) = \kappa(\cdots) \\ y = Y + \alpha\, y(\cdots) + \alpha^2(\cdots) = y(\cdots) \\ z = Z + \alpha\, z(\cdots) + \alpha^2(\cdots) = z(\cdots) \end{cases}$$

hierbei ist schon berücksichtigt, das $\alpha = 0$

die identische Trans. ergibt. Lie zeigt nun, dass die 4 Funktionen $\mathfrak{y}, k, \eta, z$ von Π -- Z, das sind die linear Glieder dieser Potenzentwicklung, charakteristisch für die Gruppe sind, dass sie beliebig gewählt eine und nur eine Gruppe ergeben, als deren erzeugende Fct. sie wohl bezeichnet werden. Man bildet aus ihnen das folgende Dif. symbol:

$$(11) \quad X = \mathfrak{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \Pi} + k \cdot \frac{\partial}{\partial K} + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial Y} + z \cdot \frac{\partial}{\partial Z}$$

d.i. ein Dif. ausdruck 1. Ordn., linear und homogen, den man auch als erzeugende Symbol der Gruppe bezeichnet. Ich will nun die 3 Arten angeben, auf die man die die Gruppe bildenden Trans. T_α definieren kann, wenn $\mathfrak{y}, k, \eta\ z$ bezw. X gegeben ist.

1.) Ist f irgend eine Funktion von Π - - Z so sind

$$X(f)\ ,\ X^2(f) = X(Xf)\ ,\ X^3 f = X(X^2 f)$$

gleichfalls bestimmte durch die in (11) angegebenen Differentiation und Mul.

mit $\dot{p}, k, \dot{y}, \dot{z}$ entstehende Funktionen von $\Pi - - Z$. Man bilde die Potenzreihe:

$$[f] = f + \alpha . Xf + \frac{\alpha^2}{2!} X^2 f + \frac{\alpha^3}{3!} X^3 f + - -$$

die für genügend kleine α konvergieren muss. Specialisiert man nun $f(\Pi K Y Z)$ in die Variablen selbst, so erhält man in

$$(11a) \begin{cases} \pi = [\Pi] & \kappa = [K] \\ y = [Y] & z = [Z] \end{cases} \quad \text{wo } [f] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} X^i f$$

explicit die Darstellung der Trans. T_α in nach α fortschreitenden Potenzreihen.

2.) Man bilde die par. Dif. Gl. für die Fct. f der 5 Var. $\alpha\ \Pi - - - Z$:

$$(11b) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = Xf \equiv \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \Pi} + k \frac{\partial f}{\partial K} + \dot{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} + \dot{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial Z}$$

und integriere sie so, dass für $\alpha = 0$, $f(\alpha, \Pi - - Z)$ bez. in die Variablen $\Pi - - - Z$ selbst übergeht; die 4 so eindeutig bestimmten Int. sind gerade die $\pi(\Pi - - - Z, \alpha) - - - z(\alpha\ \Pi - - - Z)$ die die Gruppentransform. T_α darstellen.

Dass diese Fct. mit (11a) übereinstimmen, sieht man sofort, denn man hat einmal für jede Fct. $[f]$:

$$X[f] = Xf + \alpha \cdot X^2 f + \frac{\alpha^2}{2!} X^3 f + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}[f] = Xf + \alpha X^2 f + \frac{\alpha^2}{2!} X^3 f + \cdots$$

sodass $[f]$ stets (11b) genügt; dann aber stimmen die auf beiden Arten definierten Funktionen auch in den Werten für $\alpha = 0$ überein, und das bestimmt sie mit der Dif. Gl. eindeutig.

3). Die T_α darstellenden Fct. sind die Lösungen des Systemes von 4 gewöhnlichen Dif. Gl. 1 Ordn:

$$(11c)\begin{cases} \frac{d\pi}{d\alpha} = \mathfrak{p}(\pi \kappa \mathfrak{y} \mathfrak{z}), & \frac{d\kappa}{d\alpha} = \mathfrak{k}(\pi \kappa \mathfrak{y} \mathfrak{z}) \\ \frac{dy}{d\alpha} = \mathfrak{y}(\pi \kappa \mathfrak{y} \mathfrak{z}), & \frac{dz}{d\alpha} = \mathfrak{z}(\pi \kappa \mathfrak{y} \mathfrak{z}) \end{cases}$$

die für $\alpha = 0$ die Werte $\Pi \cdots Z$ annehmen; diese 4 Var. treten hier also als Integrationskonstanten der 4 par. Lösungsschar dieses simultanen Systems ein. Dass auch diese Forderung wieder dieselben Fct. liefert, erkennt man leicht etwa

dieht durch Vergleich mit der Reihen-
entwicklung (11a)

Dass die so auf 3 verschiedene Arten definierte Transformationsschaar auch wirklich die Gruppeneigenschaft unschwer erkennen oder auch aus (11a) oder (11c) unschwer erkennen oder auch aus (11c) durch Rechnung bestätigen, und zwar findet man speciell:

$$T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$$

d.h. führt man die Transformationen mit den Parametern α, β nacheinander aus, so findet man die mit dem Par. $\alpha+\beta$. Die Relation zwischen den drei zusammengehörigen Parametern ist also bei dieser Darstellung von denkbar grössten Einfachheit.

Betrachtet man nun irgend eine Fct. $f(\pi \cdots z)$ und wendet auf sie die Trans. T_α an, d.h. ersetzt $\pi \cdots z$ durch ihre Werte in $\Pi \cdots Z, \alpha$, so findet man durch Potenzentwicklung nach α:

$$f(\pi\kappa y z) = [f(\Pi \cdots Z)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} X^i f(\Pi \cdots Z)$$

Man nennt f <u>invariant</u> gegen die Gruppe, wenn es durch alle Transform. T_α in

sich, also in

$$f(\Pi \,--\, Z)$$

unabhängig von a, übergeführt wird. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend:

$$X f(\Pi \,--\, Z) = 0$$

identisch in $\Pi \,--\, Z$, denn dann verschwinden auch alle Koef. $X^i f$ der höheren Potenzen von a in der eben angegebenen Potenzentwicklung. Die Invarianten der Gruppe sind also durch die lineare homogene Gleichung 1. Ordn.

$$X f \equiv \dot{y} \frac{\partial f}{\partial \pi} + k \frac{\partial f}{\partial \kappa} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

gegeben.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann eine durch das Symbol X in der betrachteten Weise definierte eingliedrige Gruppe lauter kanonische Trans. enthält, d.h. solche, die die Form des kanonischen Variat. prob.

$$(9) \quad \int_1^2 (\pi y' + \kappa z' + H(\pi \kappa y z))\, dx$$

ungeändert lassen; wir werden uns

dabei auf den Fall beschränken, dass die Unabhängige x in H nicht auftritt, dass sie also auch in dem F des ursprünglichen Var. Prob. nicht auftritt; das wird in der Mech., wo x die Zeit bedeutet, die Regel sein. Diese Annahme wird nur der bequemeren Darstellung wegen gemacht; die Theorie ist auf den allgemeinen Fall ohne Schwierigkeit ausdehnbar, indem man auch x mit transformiert. – Unsere Trans. Gruppe

$$\pi = \pi(\alpha; \Pi - - - Z) \quad \text{etc}$$

ist aber, wie man sofort sieht, dann und nur dann kanonisch wenn vermöge jeder Trans. der Integrand von (9) in den neuen Variablen bis auf einen additiven vollständigen Dif. Quot. A' die alte Form hat, d.h.

$$(9a) \quad \pi \cdot y' + \kappa z' = \Pi \cdot Y + K \cdot Z + A', \qquad A = A(\pi \kappa y z)$$

denn eine vollständige Ableitung A' ist für das Var. Prob. unwesentlich, da ja, wie wir früher sehen, ihre Var.-ableitungen identisch verschwinden. Setzen wir die Potenzentwicklungen (11a) ein, so geht diese Bedingung über in

$$(\Pi + \alpha \dot{y} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 X \dot{y} + \cdots)(Y' + \alpha y' + \tfrac{1}{2}\alpha^2 (X y)' + \cdots)$$
$$+ (K + \alpha k + \cdots)(Z' + \alpha z' + \cdots)$$
$$= \Pi \cdot Y' + K Z' + A'$$

Die von α freien Glieder heben sich fort: es genügt nun, zur Erfüllung dieser Gl. nur ihre Erfüllung für die linearen Glieder in α zu fordern, d.h. die Existenz einer Fct. $B(\Pi \cdots Z)$, so dass

$$\dot{y} \cdot Y' + \Pi \cdot y' + k Z' + K \cdot z' = B'$$

identisch in Π, K, Y, Z; denn wegen der Gruppennatur ergeben sich die Koef. der höheren Potenzen von α durch Anwendung der Operation X auf diesen ersten, und daher ist mit dieser Gl. auch die (9a) identisch in $\alpha, \Pi \cdots Z$ erfüllt, wenn man

$$A = \alpha B + \frac{\alpha^2}{2} X B + \frac{\alpha^3}{3!} X^2 B + \cdots$$

setzt. Führen wir nun statt B ein

$$\Phi(\Pi \cdots Z) = B - \Pi \cdot y(\Pi \cdots Z) - K \cdot z(\Pi \cdots Z)$$

also $\Phi' = B' - \Pi y' - K z' - \Pi' y - K' z$

so geht die letzte Bedingung in die Forderung der Existenz einer Fct. Φ über, so dass:

$$\dot{y} \cdot Y' + k \cdot Z' - y \Pi' - z K' = (\Phi(\Pi \cdots Z))'$$

Das ist aber identisch in $Y\,Z\,\Pi\,K$ dann und nur dann der Fall, wenn

$$(12)\quad \mathfrak{y} = \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\,,\quad k = \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\,,\quad \mathfrak{y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\,,\quad \mathfrak{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial K}\,.\quad \Phi = \Phi(\Pi \ldots Z)$$

und nun kann man offenbar Φ ganz willkürlich wählen, während die 4 die Gruppe erzeugenden Fct. dann unmittelbar als ihre 4 partiellen Ableitungen ergeben. Damit ist die Aufgabe, alle kanonischen Gruppen anzugeben, in einfachster Weise gelöst; sie hängen von einer völlig willkürlichen Fct. von 4 Variablen ab. Die kanonischen Trans., die zu einem willkürlich gewählten Φ gehören, können wir nun nach einem die früher angegebenen 3 Verfahren sofort aufstellen;

1.) Das erzeugende Symbol der Gruppe ist;

$$(12a).\quad X = \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\cdot\frac{\partial}{\partial\Pi} + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial K} - \frac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial\Phi}{\partial K}\cdot\frac{\partial}{\partial Z}$$

und daher werden nach (11a) die Trans. gegeben durch:

$$(\overline{12}a)\quad \begin{cases} \pi = \Pi + \dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}\cdot\alpha + \dfrac{\alpha^2}{2}\cdot X\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial Y}\right) + \cdots & \kappa = K + \alpha\dfrac{\partial\Phi}{\partial Z} + \cdots \\ y = Y - \dfrac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\,\alpha - \dfrac{\alpha^2}{2}\,X\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial\Pi}\right) - \cdots & z = Z - \alpha\dfrac{\partial\Phi}{\partial K} + \cdots \end{cases}$$

2.) Die Trans. der Gruppe sind die Int. von

(12b) $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = Xf \equiv (\Phi, f)$$

die für $\alpha = 0$ bez. in $\Pi, K\, Y\, Z$ übergehen. Dabei ist Xf in den beiden Fct. Φ, f offenbar bis aufs Vorzeichen symmetrisch: wir führen daher noch die Abkürzung (Φ, f) für diesen Ausdruck ein, indem wir unter dem Jacob.-Poissonschen Klammerausdruck (u, v) irgend zweier Fct. den folgenden bilinearen Dif. ausdruck 1. Ordn. verstehen:

(13.) $$(u,v) = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial \pi} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial \kappa} - \frac{\partial u}{\partial \pi}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \kappa}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}$$

für den offenbar gilt:

(13!) $$(u,v) = -(v,u) \qquad (u,u) = 0$$

3.) Die Transformationsfct. sind die Lösungen des Systemes simultaner Differential Gl.

(12c) $$\begin{cases} \dfrac{d\pi}{d\alpha} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}, & \dfrac{d\kappa}{d\alpha} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad \Phi = \Phi(\pi \cdots z) \\ \dfrac{dy}{d\alpha} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi}, & \dfrac{dz}{d\alpha} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \end{cases}$$

die für $\alpha = 0$ die Werte $\Pi \cdots Z$ annehmen.
Diese Definition ist die interessanteste,

denn diese gewöhnlichen Dif. Gl. haben genau die kanon. Gestalt der Gl. (10) unseres Var. Prob., nur dass H durch Φ und und x durch α ersetzt ist. Wir können also endlich auch sagen, dass die endlichen Transz. der zu Φ gehörigen kanonischen Gruppe das zu Φ gehörige kanonische Var. prob.;

$$\int_{\substack{1 \\ \alpha, x, y_1}}^{2} \left(\pi_1 \frac{dy}{d\alpha} + \kappa \cdot \frac{dz}{d\alpha} + \Phi(\pi \kappa y z)\right) d\alpha$$

lösen, als Funktionen des Gruppenparameters α betrachtet, d.h. die Var. ableitungen dieses Integrales annullieren.

Bei diesen allgemeinen kanonischen Gruppen wird natürlich die Funkt. H in eine andere Fct.

$$H(\pi \kappa y z) = \bar{H}(\alpha, \Pi \cdots Z)$$

übergehen, d.h. das Prob. wird in ein anderes, wenn auch wieder kanonisches übergehen. Gibt es nun aber auch Gruppen, die das Prob. in sich überführen, d.h. denen gegenüber H invariant ist? Wir wissen, dass dazu H der par. Gl.

$$X(H) \equiv (\Phi, H) = 0$$

genügen muss. Wollen wir nun umgekehrt Φ, und damit die kanonische Gruppe, so bestimmen, dass H invariant bleibt, so braucht es nur dieser linearer par. Dif. Gl. 1. Ordn:

$$(\Phi, H) \equiv \frac{\partial H}{\partial \pi}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \kappa}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} - \frac{\partial H}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = 0$$

genügen, deren Koeff. mit H bekannte Fct. sind. Es gibt also soviel kanonische Trans. des Problemes in sich, als Integrale dieser par. Gleichung. Diese Bedingung können wir nun in sehr einfacher Weise deuten. Setzen wir in Φ für y, z, π, κ Lösungen der kanonischen Gleichungen (10).

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad \pi' = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{etc}$$

ein, so besagt die Gl. $(\Phi, H) = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}\cdot \kappa' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' = 0, \text{ d. h.}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0$$

$$\Phi(y(x), z(x), \pi(x), \kappa(x)) = \text{Const.}$$

das besagt, dass Φ ein Integral der kanonischen Gleichungen ist, eine Funktion, die für jedes Lösungssystem einen konstanten Wert erhält. Diese Überlegung ist

sofort auch umkehrbar, so dass jedes Integral der kanonischen Gleichungen eine Gruppe kanonischer Trans. des Prob. in sich erzeugt. Wir haben also die interessante und tiefgreifende Beziehung, dass die Kentnisse eines Integrals der kanonischen Gleichungen und die einer einpar. Gruppe kanonischer Trans. des Prob. in sich vollkommen gleichwertig sind. Wir werden ins besondere später sehen, dass die Schwerpunkts- und Flächenintegrale der dynamischen Dif. Gl. dadurch unmittelbar verständlich werden, indem wir die entsprechenden kanonischen Transformationsgruppen des mechanischen Problems in sich aus den über Kräfte und Bedingungen gemachten Annahmen direkt angeben.

Nehmen wir jetzt an, dass wir 2. Integrale der kanonischen Gleichungen

$$\Phi(\pi \kappa y z) = \text{Const}, \qquad \Psi(\pi \kappa y z) = \text{Const}.$$

bezw. 2 Gruppen kanonischer Trans. des Prob. in sich mit den erzeugenden Symbolen

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{\partial \Phi}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

301

$$Y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \kappa} - \frac{\partial \Psi}{\partial \pi} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \frac{\partial}{\partial z}$$

kennen. Indem wir die Transformationen beider Gruppen untereinander in mannigfacher Weise zusammensetzen, müssen wir offenbar immer wieder kanonische Trans. des Prob. in sich finden, deren Gesammtheit im allgemeinen von mehreren Parametern abhängen wird, aus denen man speciell aber auch neue einparametrige Gruppen wird herausgreifen können. Nimmt man speciell zunächst die Trans. mit dem Parameter α aus der Gruppe X, dann die β aus Y, dann die $(-\alpha)$ aus X und endlich die $(-\beta)$ aus Y vor, so resultiert eine nur von $\alpha \cdot \beta$ abhängige Trans., die die Entwicklung:

$$\pi = \Pi + \alpha \cdot \beta \{ YX(\Pi) - XY(\Pi) \} + \ldots \text{ etc}$$

hat; variiert man α, β so entsteht also wieder eine einparametrige Gruppe, deren erzeugendes Symbol

$$YX - XY$$

ist, d.i. die Differenz der Operationen, die man erhält, wenn man zuerst Y auf X,

dann X auf Y anwendet. Dieses Symbol ist in der Tat ein gruppenerzeugendes von der Form

$$\bar{\mathfrak{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \pi} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial \kappa} + \bar{\mathfrak{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\mathfrak{z}}\frac{\partial}{\partial z},$$

da sich die zunächst auftretenden zweiten Ableitungen unmittelbar fortheben; die Koefficienten sind

$$\bar{\mathfrak{p}} = Y(\Phi_y) - X(\Psi_y) = (\Psi, \Phi_y) + (\Psi_y, \Phi) = \frac{\partial}{\partial y}(\Psi, \Phi).$$

und ebenso

$$\bar{k} = \frac{\partial}{\partial z}(\Psi, \Phi), \quad \bar{\mathfrak{y}} = -\frac{\partial}{\partial \pi}(\Psi, \Phi), \quad \bar{\mathfrak{z}} = -\frac{\partial}{\partial \kappa}(\Psi, \Phi)$$

Das besagt, dass der Jacobi-Poissonsche Klammerausdruck der beiden bekannten Integrale:

$$X = (\Phi, \Psi)$$

wiederum eine Gruppe kanonischer Substitution des Prob. in sich erzeugt, denn alle Trans. dieser Gruppe mit dem Symbol $YX - XY$ hatten wir ja aus Trans. aus X und Y zusammengesetzt; also muss nach den vorhin entwickeln Sätzen $X = (\Phi, \Psi)$ gleichfalls ein Integral der kanonischen Gleichungen sein:

<u>Kennt man 2 Integrale Φ, Ψ der</u>

kanonischen Gleichungen (10), so ist ihr Poissonscher Klammerausdruck (Φ, Ψ') wiederum ein Integral.

Ich will für diesen Satz, den Jacobi in seiner Dynamik als einen der merkwürdigsten der ganzen Integralrechnung bezeichnet, neben diesem gruppentheoretischen Beweis noch einen direkten analytischen vortragen. Er beruht auf der folgenden, für die Poissonschen Klammer irgend dreier Fct. u, v, w geltenden „Jacobischen Identität":

$$\text{(a)} \quad ((u,v),w) + ((v,w),u) + ((w,u),v) = 0$$

die rein formal und durch direktes Ausrechnen zu bestätigen ist. Am leichtesten beweist man sie folgendermassen: Der Klammerausdruck (u,v) zweier Fct. enthält deren erste Ableitungen, in denen er bilinear ist; bilden wir aus ihm mit einer dritten Fct. den Klammerausdruck so enthält jeder Summand eine Ableitung von (u,v), d.h. sicher eine zweite Ableitung von u oder v. Also muss jeder Summand des ausgerechnet gedachten Ausdruckes (a) eine zweite Ableitung

einer der 3 Funktionen als Faktor enthalten. Nun enthält $((v,w),u)$ sicher nur erste Ableitungen von u, zweite Ableitungen von u können also nur durch

$$((u,v),w) + ((w,u),v)$$

eintreten. Setzen wir nun

$$(v,u) = X(u), \qquad (w,u) = Y(u)$$

wo X, Y von v bezw. w abhängige Differentiationssymbole in der wiederholt betrachteten Art sind, so wird

$$((u,v),w) + ((w,u)v) = (w,(v,u)) - (v,(w,u))$$

$$= YX(u) - XY(u).$$

Nun bemerkten wir aber schon oben, dass in einem Symbol $YX - XY(u)$ die zweiten Ableitungen stets sich fortheben müssen; also können Glieder mit zweiten Ableitungen von u in unserem Ausdruck (a) überhaupt nicht eingehen; da dasselbe aber für v, w wegen der Symmetrie des Ausdruckes gelten muss und da Summanden ohne zweite Ableitungen überhaupt nicht vorkommen können, müssen sich in der Tat alle Glieder in (a) formal fortheben, er ist identisch Null.

315

Nun sollten Φ, Ψ Integrale der kanonischen Gleichungen sein, d.h. sie müssen den par. Gleichungen

$$(H, \Phi) = 0 \qquad (H, \Psi) = 0$$

genügen. Nehmen wir nun in der Jacobischen Identität $u = H$, $v = \Phi$, $w = \Psi$ so verschwindet der erste und dritte Summand, da ein mit 0 gebildeter Klammerausdruck natürlich gleichfalls verschwindet; es bleibt

$$((\Phi, \Psi), H) = 0$$

und das besagt, dass auch (Φ, Ψ) ein Integral ist.

Auf Grund dieses Satzes kann man sich also aus 2 Integralen lediglich durch Dif. processe immer neue bilden indem man die neu erhaltenen mit den alten und miteinander wieder zu Poissonschen Klammern kombiniert; man kann vermuten dass man so in jedem Falle (dies alles gilt natürlich unverändert bei Systemen von beliebig vielen unbekannten Fct.) aus 2 Integrale schliesslich alle erhält,

und das wird im allgemeinen auch der Fall sein, wenn die ersten beiden Integrale für das vorliegende Problem hinreichend willkürlich sind, d.h. nicht etwa specielle Integrale, die grossen Klassen von Problemen gemeinsam sind. Ein Integral ist stets $H = const.$ selbst, da ja (H, H) gewiss verschwindet; combinieren wir das aber mit einem Integral Φ, so erhalten wir $(H, \Phi) = 0$ eben nach der Definition des Integrales. So wird es überhaupt vorkommen können, dass die neuen Integrale (Φ, Ψ) identisch gleich Konstanten werden, also gar keine eigentlichen Integrale sind, oder auch, dass sie nichts wesentlich neues liefern, d.h. Fct. der schon bekannten Integrale werden, die ja selbstverständlich wieder Integrale sind. Das ist gerade bei den bekannten Integralen der dynamischen Gleichungen der Fall, z.B. ergibt sich so aus 2 Flächensätzen immer der dritte, sodass man durch die Poissonsche Klammern dieser 3

Integrale nichts Neues gewinnt. Das hat alles gruppentheoretisch seine einfache Bedeutung; es handelt sich einfach darum, ob die Gruppen $YX - XY$ kanonischer Trans. in sich, die wir aus den bekannten X, Y bilden, wesentlich neue Trans. enthalten, oder ob sie nur wieder bereits bekannte Trans. umfassen. – Ich schliesse damit die Darstellung dieser Theorie der kanonischen Gruppen; die einfache begriffliche Fassung der Theorie vom gruppentheoretischen Standpunkt aus verdankt man Lie, während der sachliche Inhalt schon von Jacobi herrührt.

Wir kommen nun zu der allgemeinsten, oben schon angekündigten Fragestellung nach aequivalenten kanonischen Problemen: Wie muss eine Transformation

$$\pi = \pi(\Pi, K, Y, Z) \text{ etc.}$$

beschaffen sein, damit sie das kanonische Var. Prob.

$$\int_1^2 (\pi y' + \kappa z' + H(\pi \kappa y z))\,dx$$

in ein Problem der gleichen Form transformiert. Wir haben auch bereits früher gesehen, dass dazu

$$\pi \cdot y' + \kappa z' = \Pi \cdot Y' + K \cdot Z' + A'$$

sein muss, wobei A irgend eine Funktion in Π -- Z ist, die früher noch von einem Parameter α abhing. Diese Gleichung muss vermöge der Substitutionsgleichungen identisch in Π -- Z bestehen. Um nun aus dieser Forderung die Gestalt der kanonischen Transformation wirklich herzuleiten, wenden wir folgenden Kunstgriff an: Indem wir aus den beiden letzten Transformationgleichungen $y = y(\Pi -- Z)$ $z = z(\Pi -- Z)$

Π, K als Funktion von y, z, Y, Z berechnen, denken wir uns die Trans. in der Gestalt dargestellt

$$\pi = \pi(y, z\ Y\ Z) \qquad \kappa = \kappa(y, z\ Y\ Z)$$

$$\Pi = \Pi(y, z\ Y Z) \qquad K = K(y, z\ Y\ Z)$$

aus der wir durch Auflösen jederzeit wieder die alte Gestalt gewinnen können.

Nun denken wir uns auch A als Fct. von y, z, Y, Z und haben dann die Forderung:

$$\pi y' + \kappa z' - \Pi Y' - K Z' = (A(yzYZ))'$$

Indem wir die totale Dif. in A ausführen, erhalten wir hieraus:

$$(14) \begin{cases} \pi = \dfrac{\partial A}{\partial y} & \kappa = \dfrac{\partial A}{\partial z} \\[2ex] \Pi = -\dfrac{\partial A}{\partial Y}, & K = -\dfrac{\partial A}{\partial Z} \end{cases} \qquad A = A(yzYZ)$$

Wählen wir hier $A(yzYZ)$ willkür., so stellen diese Gleichungen eine Transformation von $\Pi \cdots Z$ in $\pi \cdots z$ dar, die man explicit erhält, wenn man die zweite Zeile nach y, z auflöst; diese Transform. ist, wie unser Überlegung sofort ergibt, <u>kanonisch</u>, und ist im wesentlichen die allgemeinste kanonische Transformation. Wir erhalten sie also unmittelbar aus einer willkürlichen Funktion von y, z, Y, Z während wir die eingliedrige Gruppe kanonischer Transformation aus einer willkürlichen Fct. von $\pi \cdots z$ erhielten. – Man kann nach Lie die kanonische Transformation auch als <u>Berührungstransformation</u> auffassen

in einem Raume, dessen Koordinaten y, z und der Wert $I = \int^{xyz} (\pi y' + \kappa z' + H)\, dx$ des Integrales ist

Damit verlassen wir die Frage nach aequivalenten Var. Prob., soweit nur Transformation der unbekannten Fct. in Frage kommen; wir werden jedoch von einem ganz andern Gesichtspunkte aus darauf zurückkommen. Vorher will ich jedoch noch ein paar allgemeine Bemerkungen über die Natur des kanonischen Variations prob., oder des, aus dem es entsprang:

$(\bar{\bar{I}})$ $\int_1^2 \left\{ F(p, q, y z) + (y' - p) F_p + (z' - q) F_q \right\} dx$

machen. Es wurde bereits gesagt dass dies Integral für die Funktionen, die seine Variationsableitungen verschwinden lassen, kein wirkliches Min besitzt, sondern dass man Nachbarfct. $p\, q\, y\, z$ von x bestimmen kann, für die das Integral sowohl grössere, als kleinere Werte annimmt; das ist natürlich nur der Fall, wenn die ursprünglichen Nebenbedingungen $y' = p$, $z' = q$ fallen gelassen werden, und

man die Vergleichskurve frei im fünfdimensional Raume der p, q, y, z, x wählen kann. Nun kann man aber leicht sehen, dass die Lösungen der Lag. Gl. für das Integral in anderem Sinne eine ganz bestimmte Extremums-eigenschaft haben, und das ist deshalb so interessant, weil es den Bereich der Var. Rech. wieder weit über das Herkömmliche hin ausdehnt. Es handelt sich nämlich um folgende Problem. Man nehme $y = y(x)$, $z = z(x)$ beliebig, nur den Randbedingungen genügend an, und bestimme alsdann $p(x)$, $q(x)$ so, dass bei dem jetzt festen $y(x)$, $z(x)$ das Integral ein Max. wird; nunmehr bestimme man nachträglich $y(x)$, $z(x)$ so, dass dieser Maximalwert ein Minimum wird: ich werde zeigen, dass die Lag. ~~Gl~~ Curven gerade dieses Maximinimumproblem im eigentlichen Sinne lösen, wenn das für das Min. des ursprünglichen Var. Prob. hinreichende Criterium

$$u^2 F_{pp} + 2uv F_{pq} + v^2 F_{qq} > 0$$ für alle

u, v erfüllt ist. Das genaue Analogon zu

diesem Verhalten im Bereich variabler Grössen ist ein Sattelpkt mit horizontaler Tangentialebene, wie ihn z. B. die Fläche $z = x^2 - y^2$ bei $x = 0, y = 0$ hat; bei festem x hat z ein Maximum für $y = 0$, das Minimum dieses Maximums wird für $x = 0$ erreicht. Ich will nun kurz die Richtigkeit meiner Behauptung nachweisen. Es seien zuerst $y(x)$, $z(x)$ beliebig gegeben, so dass sie die Randwerte $y_1 z_1, y_2 z_2$ haben, & übrigens in der Nähe der schliesslichen Lösungsfunktn liegen; dann enthält das erste Problem:

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left(F(p, q, y z) + (y'-p)F_p + (z'-q)F_q\right) dx = \text{Max.}$$

nur die unbek. Funktn p, q selbst, nicht ihre Ableitungen; notwendige Bedingung ist daher einfach das Verschwinden der Ableitungen des Integranden F^* nach p, q:

$$F^*_p = (y'-p)F_{pp} + (z'-q)F_{pq} = 0,$$

$$F_1^* = (y'-p)F_{pq} + (z'-q)F_{qq} = 0, \text{ oder}$$

$p = y', \quad q = z';$

damit sind die gesuchten p, q direkt durch die gegebenen y, z bestimmt. Dass wirklich ein Max. stattfindet, lässt folgende Überlegung erkennen: da nur p, q selbst im Integranden auftreten, so wird das Integral jedenfalls dann ein Max. haben, wenn der Integrand F^* als Funk. der Grössen p, q (bei festem x) betrachtet für die Werte $p = y'$, $q = z'$ ein Max. hat; dafür gibt aber die elementare Diff.rechnung als hinr. Criterium;

$$F^*_{pp} \cdot u^2 + 2uv F^*_{pq} + v^2 \cdot F^*_{qq} < 0 \text{ für alle } u, v.$$

Das geht nun aber, wenn wir noch $p = y'$, $q = z'$ einsetzen, über in

$$-u^2 F_{pp} - 2uv F_{pq} - v^2 F_{qq} < 0,$$

+ das war ja gerade die Voraussetzung, die

wir schon bei dem ursprünglichen Var. Prob. gemacht hatten. Also findet in der Tat ein Max. statt, dessen Wert durch

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} F(p, q, y, z)\,dx\,, \quad \text{wo } p = y', q = z'$$

gegeben ist. Sollen wir das nun zu Min. machen, so haben wir genau das urspr. Var. Prob. vor uns, wir bekommen daher genau die alten Lagr. Gln, + das Min. findet wirklich statt. Damit ist der gewünschte Nachweis vollständig erbracht, + das Var. Prob. ($\overline{I}$) für die 4 Unbekannten hat jetzt nicht mehr bloss eine formale Bedeutung, indem es das Verschwinden der Var.-ableitungen kurz auszudrücken gestattet, sondern es enthält die wohldefinierte Forderung eines Maximominimums.

Für das kanonische Var. Prob.

$$\int_1^2 (\pi y' + \kappa z' + H(\pi\, \kappa\, y\, z))\, dx$$

gilt genau dasselbe, da es ja nur durch eine formale Transf. der 4 Unbekannten aus jenem Prob. hervorgeht. Man mache zunächst bei festem y, z das Integral durch Bestimmung von π, κ zum Max. & bestimme sodann y, z so gemäss den Randbedin., dass dies Max. ein Min. wird. Man kann das auch direkt verificieren. — Ich will hier übrigens noch bemerken, wie man aus dem kanonischen Prob. das ursprüngliche, d.h. aus beliebig gegebenem $H(\pi\, \kappa\, y\, z)$ das $F(y' z' y z)$ erhält. Wir hatten fruher (S. 355) statt p, q π, κ durch

$$(9^a) \qquad \pi = F_p(p\, q\, y\, z) \qquad \kappa = F_q(p\, q\, y\, z)$$

eingeführt, & dann

(9^b) $\mathcal{H}(\pi\,\kappa\,y\,z) = F(p\,q\,y\,z) - p\,\pi - q\,\kappa$

gesetzt. Es ist nun

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} = F_p \cdot \frac{\partial p}{\partial \pi} - \frac{\partial p}{\partial \pi} \cdot \pi - p = -p \quad \text{wegen } (9^a)$$

ebenso $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \kappa} = -q$,

& daher kommen wir nun umgekehrt von $\mathcal{H}(\pi\,\kappa\,y\,z)$ zu F, indem wir p, q statt π, κ durch

(9^c) $\quad p = -\mathcal{H}_\pi\,, \quad q = -\mathcal{H}_\kappa$

einführen, & dann setzen:

(9^d) $\quad F(p\,q\,y\,z) = \mathcal{H}(\pi\,\kappa\,y\,z) + p\cdot\pi + q\cdot\kappa$

Damit haben wir dann den Integranden des zu dem kanonischen Var. Probleme gehörigen ursprünglichen, oder auch die zu den kanonischen Gleichungen gehörigen Lagr.

Wir kommen nun von ganz andere Seite her auf die Frage nach aequivalenten Var. Problemen zurück, indem wir mit Hilfe der Kenntniss von Integralen der Lagr. Gl. 49, 50 Vorles. 12. II.

eine unbek. Funk. aus dem Probleme zu eliminieren suchen, oder überhaupt das nach Kenntniss der Integrales noch übrig bleibende Problem wieder als Var. Prob. darzustellen suchen. Diese Fragestellung wird uns in die hauptsächlichen Theorieen der modernen Dynamik einführen, die auch in ihren Anwendungen auf die Physik von höchster Wichtigkeit sind; es handelt sich hier um die Theorie der cyklischen Systeme & verborgenen Bewegungen & alles daran anknüpfenden, wie sie Helmholtz, Lord Kelvin, J. J. Thompson ausgebildet haben.

Wir gehen aus von einer speciellen Annahme über die Gestalt des Integranden $F(y', z', y, z; x)$: es möge die eine Unbek. z selbst nicht enthalten, während die

Ableitung z' beliebig auftreten kann:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(y', z'; y; x) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \equiv 0$$

Dann lauten die Lagr. Gl'n des Var. Problems:

$$(1) \qquad \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \mathcal{F}(y', z'; y; x)\, dx = Min.$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$$

& man kann ein Integral sofort angeben:

$$(\bar{2}) \qquad \frac{\partial F}{\partial z'} = \text{const.} = c.$$

Wir stellen nun genau die Frage, die uns schon früher vom Ham.- zum Euler- & Jacobischen Principe führte, & wir werden diese Principe dann sogar als besondere Fälle der jetzt abzuleitenden Var. Probleme erkennen für den Fall, dass die Unabhängige x (die Zeit t) die in $\mathcal{F}$ nicht selbst auftretende Grösse & das bekannte Integral der Energiesatz ist. Wir geben für die Integrations-konstante des Integrales $(\bar{2})$ zahlenmässig

einen bestimmten Wert c, dann können wir zur vollständigen Bestimmung eines Lösungssystemes von (2) noch über 3 Integrationskonstanten willkürlich verfügen, etwa über die Werte y_1, y_2 von $y(x)$ an den Rändern x_1, x_2 & über einen Randwert $z(x_1) = z_1$ von z. Es ist nun zunächst ein Var. Prob. anzugeben, das bei diesen Randbed'n gerade die richtige Funk'n $y(x)$, $z(x)$ zu Minimalfunk'n hat, dessen Var.-ableitungen also gerade die Gl'n:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z'} = c$$

liefern; das urspr. Var. Prob. (1) leistet das nicht, denn aus ihm folgt $F_{z'}$ gleich einer willkürlichen Konstanten, die sich aus den 4 Randbed'n bestimmt, nicht gleich unserm gegebenen Werte c. Vielmehr unterscheidet sich das neue Prob. wesentlich von ihm, nicht etwa bloss durch eine Transf. der Unbe-

konnten, wie die früher behandelten bedingten Problemen. Es entsteht aber durch eine sehr einfache Modifikation aus ihnen, & zwar ist es merkwürdigerweise eine absolute Minimalforderung ohne Nebenbedingung,* lautet:

(15.) $$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \{F(y', z', y; x) - c\cdot z'\} \, dx = \text{Min.},$$

unter c die gegebene Konstante verstanden; zur Conkurrenz zugelassen sind alle Funktionen y, die für $x = x_1, x_2$ die gegebene Werte y_1, y_2 annehmen, sowie alle Funktionen z ohne Einschränkung durch Randbedingungen – natürlich aber in der Nähe der Minimalkurve gelegen. In diesem Var.-Probl. kommt z nicht vor; da es aber obendrein keinen Randbedingungen unterworfen ist, ist auch die allein vorkommende Ableit. z' eine vollkommen willkürl. Fkt. (was nicht der Fall ist, wenn z an den

Rändern gegeben ist). Wir können das Integral daher so auffassen, als ob nur die unbekannte Fkt. z' darin vorkäme, ohne ihre Ableit., und als erste notw.e Bed. des Min. ergibt sich daher, wie wir schon mehrfach sahen, das Verschwinden der Ableit. des Integranden nach z':

$$\mathfrak{F}_{z'} - c = 0$$

Von der zweiten Unbekannten y sind die Randwerte in gewöhnlicher Weise gegeb., es ergibt sich daher als zweite notw.e Bed. das Verschwinden der Var.ableit. nach y im gewöhnlichen Sinne, und die ist, da das Zusatzglied cz' y nicht enthält:

$$\frac{d\mathfrak{F}_{y'}}{dx} - \mathfrak{F}_y = 0,$$

und damit ist gezeigt, dass das Var.-prob. in der Tat gerade die gesuchten Gleich.n liefert. Aus ihnen und den Rand.bed.n ist, wie man durch Elimin. von z' erkennt, y vollkommen und z bis auf eine additive Constante bestimmt; in der Tat ändert sich ja auch der Integral.wert nicht, wenn man zu z eine Konstante addiert; z wird vollkommen bestimmt,

wenn man noch $z(x_1) = z_1$ gibt. Man sieht auch leicht, dass im allgn. unser neues Var.-prob. gleichzeitig mit dem alten ein wirkliches Min. aufweist. Denn die Anwend. des Unabh.-ktssatzes auf das Prob., den Pkt. $x_1|y_1|z_1$ mit der Geraden $x = x_2|y = y_2$ durch eine das Integral (15) zum Min. machende Curve zu verbinden, ergibt genau wie in den früher behandelten Fällen das Legendresche Criterium als hinreich.; da aber in dieses nur 2te Ableitn. nach y', z' eingehen, so stellt es für F und $F - cz'$ genau die gleiche Bed. – Dies Var.-prob. (15) liefert in seiner Anwend. auf die Mechanik ein neues, meines Wissens bisher noch nicht benutztes Prin., das einfacher als das Eulersche ist; zu dem diesem analogen gelangen wir jetzt so. – Wir fügen dem Var.-prob. (15) einfach das Integral $\mathfrak{F}_{z'} = c$ (unter c immer den numerisch gegebenen Wert verstanden) als Nebenbed. bei, und haben:

(16) $$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} (F(y' z' y) - cz')\,dx = \text{Min.}, \text{ während } \overline{\mathfrak{F}_{z'} = c}$$

323

wo die zugelassenen y gegebene Randwerte haben, die z wieder vollkommen frei sind. Es ist direkt selbstverständlich, dass die Minimalfktn dieses Probs mit denen des ersten (15) übereinstimmen; denn da diese $\int_{x_1}^{x_2}(F - cz')dx$ zum absoluten Min. machen, müssen sie es auch zum relativen Min. hinsichtlich der Nebenbed. $F_{z'} = c$ machen, der sie ja selbst genügen. Dass das neue relative Minimum Prob. (16) auch notw. wieder auf dieselben Fktn führt, erkennt man auch durch Anwend. des Lagran Faktorenverfahrens[1]: Wir betracht. dazu,

$$F - cz' + \lambda(F_{z'} - c);$$

da z wieder vollkommen frei ist, haben wir die Vars ableit nach z wieder einfach durch partielle Differentiation nach z' zu bilden:

$$F_{z'} - c + \lambda \cdot F_{z'z'} = 0$$

1.) Man kann den Beweis auch ohne dieses Verfahren führen, was principiell wichtig ist. Man ersetze y durch $y + \varepsilon\mu(x)$ und bestimme $z' = z'(x, \varepsilon)$ aus der Nebenbed. $F_{z'} = c$; dann ist notw. dass die ableit. des so gebildeten Integrals (16) nach ε verschwindet. In dieser erhält $\frac{\partial z'}{\partial \varepsilon}$ den Faktor $F_{z'} - c = 0$, und es bleibt die Bed. des Verschwindens der Varabl. nach y im gewöhnlichen Sinne:

$$(F_{y'})' - F_y = 0$$

und unter Berücksichtigung der Nebenbed. und von $F_{z'z'} \neq 0$ (Legendres Bed.) folgt:

$$\lambda(x) = 0 \;;$$

also ist die Var.ᵉ ableit. nach y genau wie beim absoluten Prob.ᵉ (15) beschaffen; und sie gibt mit $F_{z'} = c$ in der Tat wieder genau die alten Gleich.ⁿ für y, z, wie beim Prob. (15). — Indem wir aus der Neben bed. c im Integrale ersetzen, erhalten wir als rein formale Umschreibung des Prob.ˢ:

(16a) $$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \left(F(y', z', y) - F_{z'} \, z' \right) dx = \text{Min. während } F_{z'} = c,$$

was noch genauer dem Euler-Maupertuischen Prin. entspricht. Hier darf man aber, wie man sieht, die Nebenbed. keineswegs mehr weglassen, und dass man diese Form meist benutzte, mag wohl der Grund sein, dass das absolute Var.ˢ-prob. (15) bisher nie ausgesprochen wurde. — Aus (16) erhalten wir nun endlich direkt ein drittes, dem Jacobischen Prin. entsprechendes Minimalprob., indem man mit Hilfe der Neben bed. z' eliminiert. Aus

$$F_{z'}(z' y' y; x) = c$$

berechne man

$$z' = \varphi(y', y; x) \;;$$

alsdann geht (16) in das folgende absolute Minimalprob. für die eine Unbekannte $y(x)$ über:

$$(17.)\quad \int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \left\{ F(z' y' y) - c\cdot z' \right\}_{z'=\varphi(y' y)} dx = \int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} f(y'; y; x)\, dx = \text{Min.}$$

wo y an den Rändern gegeb. ist; es ist wieder genau von der Form des ursprünglichen Probs (1.), nur für eine unbekannte Fkt. weniger. Ist y aus dem Var.-probs bestimmt, so folgt z nachträglich aus $F_{z'} = c$ durch eine Quadratur. Man kann auch wieder direkt sehen, dass dies wieder auf die alten Gleichn führt; denn die eine Vars-ableit. von (17) nach y ist:

$$\frac{d f_{y'}}{dx} - f_y = \frac{d}{dx}\left\{F_{z'}\frac{\partial z'}{\partial y'} + F_{y'} - c\frac{\partial z'}{\partial y'}\right\} - \left\{F_{z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + F_y - c\frac{\partial z'}{\partial y}\right\} = 0$$

oder da sich $z' = \varphi(y' y)$ aus $F_{z'} = c$ ergab:

$$\frac{d F_{y'}}{dx} - F_y = 0$$

was mit $F_{z'} = c$ genau das alte System ist. – Dieses Prin. ist das am tiefsten greifende, da es das Prob. um eine Stufe im Hinblick auf die Anzahl der Variablen reduciert. Man hat es sehr verschieden genannt, die Benennung nach Jacobi ist wohl die passendste, da in dessen

Prin. wenn auch in speciellen Form der wesent. Gedanke der Elimination zuerst klar angewandt wird. In der Physik ist z die verborgene Koordinate, y die sichtbare, für die man allein die Beweg. kontrollieren kann. Natürlich macht es gar nichts aus, wenn von Fktn beider Arten beliebig viele da sind.

Wir können dieselben Überlegung auch an der kanonischen Gestalt des Varsprobs und der Gleichn machen, wo wir sogar den Durchgang durch Probe. mit Nebenbed. vollkommen sparen. Bei der Lagea... dreschen Transf. ergibt sich, dass F und $\mathcal{H}$ gleichzeitig von z frei sind, und daher lauten die Gleichn des kanonn Varsprobs das (1.) entspricht:

$$(9.)\quad \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left\{ y' \cdot \pi + z' \cdot \kappa \cdot \mathcal{H}(\pi, \kappa, y) \right\} dx = Max.$$

$$\begin{cases} y' = -\mathcal{H}_\pi & z' = -\mathcal{H}_\kappa \\ \pi' = \mathcal{H}_y & \kappa' = 0, \end{cases}$$

und wir haben das $F_{z'} = Const = c$ entsprechende Integral:

$$\kappa = Const = c$$

Geben wir c numerisch, so wird

$$\mathcal{H}(\pi, \kappa, y) = \mathcal{H}(\pi, c, y) = h(\pi; y)$$

allein von π, y abhängig: die beiden ersten Gleich$\underline{n}$:

$$y' = -h_\pi \quad \pi' = h_y$$

enthalten gleichfalls nur π, y und sind ersichtlich die Var$\underline{s}$ ablei$\underline{n}$ des ein Variablenpaar weniger enthaltenden kanonischen Prob.$\underline{s}$:

$$(18.) \quad \int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \left(\pi \cdot y' + h(\pi, y)\right) dx = \text{Max.} - \text{Min.}$$

das also bei gegeb. Randwerten y_1 y_2 das gesuchte Var$\underline{s}$prob. für die sichtbare Koordinate ist, wobei das in h als Parameter enthaltene c gegeb. gedacht ist; z' ergibt sich nachträglich durch Quadraturen aus

$$z' = -\mathcal{H}_\kappa = -\frac{\partial h}{\partial c}$$

Man sieht nun leicht, dass zu diesem kanon$\underline{n}$ Prob. (18) als gewöhnliches Var$\underline{s}$prob. für $y(x)$ gerade (19) gehört. Um es zu erhalten, hat man näm. zu setzen (vgl. § 383, (9$\underline{d}$)):

$$f(y', y) = \pi \cdot y' + h(\pi y) = \pi y' + \mathcal{H}(\pi c y)$$

wo rechts π aus

$$y' = -h_\pi = -\mathcal{H}_\pi(\pi c y)$$

durch y, y' auszudrücken ist. Nun war aber vermöge $y' = -\mathcal{H}_\pi$ $z' = -\mathcal{H}_\kappa$:

$\mathfrak{F}(y'z'y) = y'\pi + z'\kappa + \mathfrak{H}(\pi\kappa y)$, und daher
$f(y',y) = \mathfrak{F}(y'z'y) - c\cdot z'$ (wegen $\kappa = c$),
wo rechts z' aus $z' = -\mathfrak{H}_c(\pi c y)$ und $y' = -\mathfrak{H}_\pi$ durch y, y', c ausgedrückt gedacht werden kann; da die Auflösung dieser beiden Formeln aber auch durch $\kappa = c = \mathfrak{F}_{z'}(z'y'y)$ gegeb. werden kann, so haben wir in der Tat genau den Integranden von (17) erhalten. Damit haben wir auch eine neue Ableit. dieses Jacobischen Prin[zip]s auf dem Umwege über die kanon[ische]n Gleich[unge]n! Wir kommen nun zu einer Verallgemeinerung dieser Überlegungen für den Fall, dass wir ein beliebiges Integral der Lagra[nge]n Gleich[unge]n kennen, während wir bisher wegen der besondern Gestalt von $\mathfrak{F}$ das besondere $\mathfrak{F}_{z'} = c$ bezw. $\kappa = c$ kannten; wir werden sehen dass sich die wichtige Reduction des Var[iation]sprob[lem]s um eine Stufe auch hier vollziehen lässt. Der bequemeren Darstellung halber schliessen wir an das zuletzt bereits betrachtete kanon[isch]e Var[iation]sprob.:

$$(9.)\quad \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left\{ \pi y' + \kappa z' + \mathcal{H}(\pi \kappa y z) \right\} dx = \text{Max.-Min.}$$

und an die zugehörigen kanon$\underline{\text{n}}$ Gleich$\underline{\text{n}}$

$$(10.)\quad \begin{cases} y' = -\mathcal{H}_\pi & z' = -\mathcal{H}_\kappa \\ \pi' = \mathcal{H}_y & \kappa' = \mathcal{H}_z \end{cases}$$

an; über die Gestalt von $\mathcal{H}$ machen wir keine speciellen Voraussetzungen mehr, vielmehr nehmen wir an, dass wir irgendwie ein (der Bequemlichkt. halber x wieder nicht enthaltendes) Integ. der Gleich$\underline{\text{n}}$ (10) kennen:

$$(\overline{10}.)\quad \mathcal{G}(\pi, \kappa, y, z) = \text{Const.} = g\,.$$

und es sei wieder ein Wert g der Integrationskonst$\underline{\text{n}}$ numerisch gegeben. Lässt sich für das nach dieser Kenntnis noch unbekannt Bleibende nicht wieder ein kanon$\underline{\text{es}}$ Var$\underline{\text{s}}$ prob. mit weniger unbek.$\underline{\text{n}}$ Fkt$\underline{\text{n}}$ angeben? Wir werden natürlich nicht verlangen können, dass wie vorhin ein Variablenpaar z, κ einfach fortfällt, wir werden vielmehr jetzt auch auf die frühere Th. der Transf. des Integrales zurückgreifen, und fragen ob man nicht neue Unbekannte $Y Z \Pi K$, Verbindungen

der y, z, π, κ so einführen kann, dass von ihnen sich wirklich ein Paar Z, K eliminieren lässt mit Hilfe eines bekannten Integrales; während wir vorhin wussten, dass die Koordinate z eine „verborgene" wird, lässt sich hier nicht bald angeben, welche Verbindung der Koordinaten diese Eigenschaft erhält, wir wollen vielmehr erst eine Transf. finden, die uns die Möglichkeit der Elimination gewährt. Man würde nun sofort auf den vorigen Fall zurückkommen, wenn man eine solche kanonische Transf. der Unbekannten:

$$Y = Y(y\,z\,\kappa\,\pi) \ldots \quad K = K(y\,z\,\kappa\,\pi)$$

angeben könnte, dass gerade

$$(19.) \quad K = G(\pi\,\kappa\,y\,z)$$

wird. Denn dann wird

$$K = \text{Const.} = g$$

ein Integral der Gleichungen des transformierten Probs:

$$\int_1^2 (\Pi Y' + K Z' + H(\Pi, K, Y, Z))\,dx = \text{Max.-Min.}$$

und da diese Gleichungen

$$Y' = -H_\pi \ldots\ldots\ldots K' = H_Z$$

lauten, folgt $H_Z = 0$, d.h. H enthält Z nicht, wir sind genau in dem vorigen Falle, das eine Fkt. Z nicht vorkommt und das zugehörige Integral $K = q$ bekannt ist; also ist Z eine verborgene Koordinate und für die andere Y und Π haben wir wieder ein kanonisches Prob.:

$$(19^a) \int_1^2 \left(\Pi Y' + H(\Pi, Y)\right) dx = \text{Max - Min.}$$

wo $H(\Pi Y)$ durch substitution von $K = q$ aus $H(\Pi K Y)$ entsteht. Können wir also eine kanon^e Transf. angeben, die nur die Gleich. (19) erfüllt, so geht durch sie direkt $\mathcal{H}(\pi \kappa y z)$ in eine Fkt. nur von Π, Y über wenn man noch bald $K = q =$ geinsetzt; und man hat sofort das reducierte kanon^e Prob. für Y, Π, die „sichtbaren" Koord^n. – Jede kanon^e Transf. kann man nun durch eine willkür^e Fkt. $A(y, z, Y, Z)$ in der Form (14) darstellen

$$\pi = \frac{\partial A}{\partial y} \qquad \kappa = \frac{\partial A}{\partial z}$$

$$\Pi = -\frac{\partial A}{\partial Y} \qquad K = -\frac{\partial A}{\partial Z}$$

wo A nur so zu wählen ist, dass die ersten beiden Gleich.$\underline{n}$ nach Y, Z auflösbar werden und wir so in der Tat Π, K, Y, Z als Fkt$\underline{n}$ von π, κ, y, z erhalten. Wir wollen nun aber eine Transf. haben, die K als die gegeb$\underline{e}$ Fkt. $\mathcal{G}(\pi \kappa y z)$ liefert (19), und das wird dann und nur dann der Fall sein, wenn A identisch in y, z, Y, Z der Gleich.:

$$(19^{b}) \quad -\frac{\partial A}{\partial Z} = \mathcal{G}\left(\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, y\, z\right)$$

genügt; wir erhalten also wirklich eine Transf., die das gewünschte leistet, wenn wir A als solche Lösung dieser partiellen Gleich. 1 Ordn. mit den Unabhängigen y, z, Z bestimmen, die noch einen willkür.$\underline{n}$ Parameter Y enthält. Damit ist die Möglichkt der Reduktion des Prob.$\underline{s}$ gewährleistet, und zwar auf sehr mannigfache Art. Die Gleich. (19^{b}) ist nun gerade eine Hamiltonsche ~~Fkt. G zu einem Var$\underline{s}$ prob.~~ Gleich. (7^{b}) die zu einem Var$\underline{s}$ prob. mit der Hamil$\underline{n}$ Fkt. G gehört, und die man daher auf die gewöhnlichen Gleichungen dieses Var$\underline{s}$ prob$\underline{s}$ unmittelbar zurückführen kann; diese Gleich$\underline{n}$ würden aber genau die der zu G gehörigen kanon$\underline{n}$ Transf.gruppe

sein, und man kann von hier aus zeigen, dass man bei Kenntnis der Transf. gruppe von G. (d.h. bei Kenntnis von deren endlichen Gleich.^{n}) die Reduktion des Prob.^{s} vollständig angeben kann. Ich will diesen interessanten Zusammenhang aber hier nicht weiter verfolgen, denn wenn es — wie gewöhnlich nur auf die Kenntnis eines Paares von sichtbaren Koordinaten Y, Z, d.h. auf die Aufstellung eines Var. probs (19^{a}) ankommt, so ermöglicht es die folgende Überlegung, ohne irgend eine Integration auszukommen: Ist A gemäss (19^{b}) bestimmt so wissen wir, dass bei der entsprechenden kanon.^{n} Transf. Z von selbst aus H herausfällt; wir müssen also dieselbe Fkt. $H(\Pi, Y)$, auf die allein alles ankommt, aus H erhalten, wenn wir von vornherein $Z = 0$ setzen d.h. nur eine (19^{b}) genügende Fkt. $A(y, z\ 0, Y)$ bestimmen. Für diese aber ist die Differential Gl.^{n} gar keine Bed. mehr, denn nach dem bekannten Existenzsatz kann man ein Integral von ihr angeben, das für $Z = 0$ in eine willkür. gegebene Fkt. $A(y, z, Y)$ (wo Y als Parameter gedacht ist) übergeht.
Setzen wir nun

$$(19^e)\begin{cases}\pi=\dfrac{\partial A}{\partial y}\ , & \kappa=\dfrac{\partial A}{\partial z} \qquad A=A(y,z,Y) \\ \Pi=-\dfrac{\partial A}{\partial Y}\ , & K=g=\mathcal{G}\left(\dfrac{\partial A}{\partial y},\dfrac{\partial A}{\partial z},y,z\right)\end{cases}$$

und ist nur A so bestimmt, dass die letzte Zeile nach y, z auflösbar ist, so erhalten wir $y, z, \pi\,\kappa$ als Fktn von Y, Π, g und durch diese Substitution geht $H(\pi\,\kappa\,y\,z)$ in das gewünschte $H(\Pi, Y)$ über. Man kann nun über A sehr einfache Annahmen machen, die Einfachste, in den meisten Fällen mögliche dürfte sein:

$$A=y\cdot Y$$

Dann lauten die Substitutionsgleichn:

$$(19^f)\begin{cases}\pi=Y & \kappa=0 \\ \Pi=-y & K=g=\mathcal{G}(Y,0,y,z)\end{cases}$$

und die Auflösung ist immer dann möglich, wenn

$$\mathcal{G}(Y,0,-\Pi,z)=0$$

nach z auflösbar, also $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\neq 0$ ist: dann werde $z=\gamma(Y,\Pi)$, also ist

$$H(\Pi,Y)=\mathcal{H}(Y,0,-\Pi,\gamma(Y,\Pi))$$

und das neue Var=prob. lautet:

$$(19^{e})\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2}\{\Pi\cdot Y'+\mathcal{H}(Y,0,-\Pi,\gamma(Y\Pi))\}dx=\text{Max}-\text{Min.}$$

und es ergibt Y, Π als Fktn von x, wenn die Randwerte von Y gegeben sind; aus ihnen erhält man dann vermöge (19^{d}) die ursprüngn Unbekn, die dann stets dem vorgegebenen Integral $G(\pi\,\kappa\,y\,z) = g$ genügen müssen. Damit haben wir die allgste Fassung des Begriffes der verborgenen Koordinaten, die wohl möglich ist, erreicht, indem wir von einem ganz beliebigen Integrale der Lagran Gln ausgingen. Natürlich kann man das harmonische Vars prob. (19^{e}) auch wieder in ein gewöhnliches für die 1 Unbeke Y umformen, indem man Π vermöge $Y' = -H_{\Pi}$ durch Y, Y' ausdrückt. Man kann auch $\Pi = -y$ einführen und erhält so ein Vars prob. für die alte Koorde y. — Auf die nähere Behandlung dieser Dinge vom allgn Standpkte kann ich nun hier nicht mehr eingehen, ich wende mich jetzt vielmehr der Anwend. der in diesem Paragraphen vorgetragenen Theorien auf die Mechanik zu.

§16 Anwendung auf die Integrationstheorie der Gleichn der Mechanik.

Zunächst wollen wir die oben nachgewiesenen allgn Beziehungen zwis. kanonn Transfn des Probs in sich und Integrationen auf unser eigentlichen mechanischen Probs anwenden; wir werden dabei insbesondere zu einer naturgemässen Ableit. und zum Verständnis der 10 allgn Integrale der Energie, des Schwerpkts und der Flächen gelangen.

Wir knüpfen natürlich an das Hamils Prinz an:

$$(1) \quad \int_{t, p_1^{(1)} \dots p_r^{(1)}}^{t, p_1^{(2)} \dots p_r^{(2)}} L(p_1', \dots p_r', p_1 \dots p_r)\, dt = Min.$$

(§14) wo die Lagras Fkt. L einen in den Ableitn $p_1' \dots p_r'$ homogen quadratischen Summanden hat, während der andere Teil nur von $p_1 \dots p_r$ abhängt; Anfangs- und Endort und -zeit sind gegeben. Wir wollen uns hier der bequemeren

Darstellung halber auf den Fall ohne Nebenbed. beschränken, wo die Parameter die Koord^{n} $x_1 y_1 z_1 \ldots x_n y_n z_n$ der n Sys.pkte. selbst sind und die Lagra^{e} Fkt. die einfachste Gestalt

$$(2)\quad \mathcal{L} = T - U = \sum_{h=1\ldots n} \tfrac{1}{2} m_h (x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2) - U(r_{12}, r_{13} \ldots r_{n-1,n})$$

---

hat; wir setzen die Potentielle Energie U nur von den Entfernungen der Massenpkte. m_h, m_k abhängig voraus (nur innere Kräfte), um bald in den Fälle der Gültigkt. unserer allg^{n} Integrale zu sein. Liegen unfrei Sys. vor, d. h. ist T eine allg^{e} homogene quadratische Fkt. der Ableit^{n} mit von den Koord^{n} abhängigen Koeff^{n}, so sind alle Betrachtungen ganz unverändert mit einem geringen Mehraufwande von Rechnung nachzumachen. Unsere Aufgabe besteht nun darin die allg^{e} Trans.theorie des § 15 auf unsern Fall zu übertragen: An Stelle der Unabh^{n} x dort tritt die Zeit t, an Stelle der 2 unbekannten Fkt^{n} y z treten die $3n$ Unbekannten $x_1 \ldots z_n$ an Stelle des Integranden F endlich tritt die Lagra'sche Fkt $\mathcal{L}$. Die Erhöhung

der Anzahl der neubekannten Fkt^n macht natürlich für die Theorie gar nichts aus. Wir haben uns zunächst die Hamil. Fkt. H zu bilden; dazu müssen wir entsprechend den früheren 2 Fkt^n π κ 3n Fkt^n

$\pi_1\ \kappa_1\ \varphi_1\ --\ \pi_n\ \kappa_n\ \varphi_n$

für die 3n Ableit^n $x_1' \ldots z_n'$ einführen, indem wir setzen:

$$\pi_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x_h'} = m_h x_h' \qquad \kappa_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y_h'} = m_h y_h'$$

$$\rho_h = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z_h'} = m_h z_h' \qquad (\text{Vgl. } \S 15-9^a)$$

und daraus die Geschw^n berechnen. Die Gl^n wird, da L nur quad. in den Ableit^n ist, und wir erhalten unmittelbar:

$$x_h' = \frac{\pi_h}{m_h} \qquad y_h' = \frac{\kappa_h}{m_h} \qquad z_h' = \frac{\rho_h}{m_h} \qquad (3^a)$$

Die Hamil. Fkt. ist nun ($\S 15-9^b$)

$$H = T - U - \sum_{h=1 \ldots n}\left(x_h' \frac{\partial T}{\partial x_h'} + y_h' \frac{\partial T}{\partial y_h'} + z_h' \frac{\partial T}{\partial z_h'} \right)$$

Da T homogen quad. in $x_1' \ldots x_n'$ ist, ist

$$\sum\left(x_h' \frac{\partial T}{\partial x_h'} + y_h' \frac{\partial T}{\partial y_h'} + z_h' \frac{\partial T}{\partial z_h'}\right) = 2T$$

und es bleibt:

$$H = -T - U = -\frac{1}{2}\sum \frac{1}{m_h}\left(\pi_h^2 + \kappa_h^2 + \rho_h^2\right) - U(r_{12} \ldots r_{h-1,h}) \qquad (4)$$

so dass das Hamil. Prinzip durch das folgende kanonische Var. prob. mit 6n Unbekannten:

~~kommt~~

$$\int_{t_1\, x_h^{(1)}\, y_h^{(1)}\, z_h^{(1)}}^{t_2\, x_h^{(2)}\, y_h^{(2)}\, z_h^{(2)}} \left\{ \sum (\pi_h x_h' + \kappa_h y_h' + \rho_h z_h') - \frac{1}{2} \sum_h \frac{1}{m_h} (\pi_h^2 + \kappa_h^2 + \rho_h^2) - U \right\} dt = \text{Max}$$

zu ersetzen ist. In H kommt die Zeit t nicht explicit vor, nach der allg$\underline{n}$ Theorie ist daher ein erstes Int. des Probl. durch H selbst gegeben.

$$H \equiv -T - U = \text{Const}.$$

und das ist nichts als der Energ. Satz: die Hamil. Fkt. H ist ja bis aufs Vorzeichen nichts als Gesammtenergie des Sys. Jedes andere Int.

(5a) $$\phi(\pi_h\ \kappa_h\ \rho_h\ x_h\ y_h\ z_h) = \text{Const}$$

der Lagran$\underline{n}$ Gl$\underline{n}$ muss nun einer Gruppe kanonischen Trans.$\underline{n}$ des Probl. in sich entsprechen, d. h. einer Gruppe kanon. Trans$\underline{n}$ der 6n Unbekannten:

$$\pi_1 = \pi_1(\alpha\ \overline{\pi}_1, \ldots \overline{z}_n)$$

$$\ldots$$

$$z_n = z_n(\alpha\ \overline{\pi}_1, \ldots \overline{z}_n)$$

die H in sich überführt das Symbol dieser Gruppe ist:

(5b) $$X = \sum_{h=1\ldots n} \frac{\partial \phi}{\partial x_h}\frac{\partial}{\partial \pi_h} - \frac{\partial \phi}{\partial \pi_h}\frac{\partial}{\partial x_h} + \frac{\partial \phi}{\partial y_h}\frac{\partial}{\partial \kappa_h} - \frac{\partial \phi}{\partial \kappa_h}\frac{\partial}{\partial y_h} + \frac{\partial \phi}{\partial z_h}\frac{\partial}{\partial \rho_h} - \frac{\partial \phi}{\partial \rho_h}\frac{\partial}{\partial z_h}$$

ihre gewöhnlichen Diff. Gl$\underline{n}$ sind (p 15-12 ≦)

5(c) $$\begin{cases} \dfrac{d\pi_h}{d\alpha} = \phi_{x_h} & \dfrac{d\kappa_h}{d\alpha} = \phi_{y_h} \quad \dfrac{d\rho}{d\alpha} = \phi_{z_h} \quad (h = 1 \ldots n) \\ \dfrac{dx_h}{d\alpha} = -\phi_{\pi_h} & \dfrac{dy_h}{d\alpha} = -\phi_{\kappa_h} \quad \dfrac{dz_h}{d\alpha} = -\phi_{\rho_h} \end{cases}$$

und damit H in sich übergeführt wird, muss die Relation bestehen:

$$X(H) = (\phi H) = \sum_h \frac{\partial \phi}{\partial x_h}\frac{\partial H}{\partial \pi_h} - \frac{\partial \phi}{\partial \pi_h}\frac{\partial H}{\partial x_h} + \cdots) = 0$$

Wir können nun aber wegen der besondern Gestalt von T und U sofort solche Gruppen von Trans^n das H in sich angeben. Da U nun von den Entfernungen r_{hk} abhängt, so ändert es sich nicht, wenn wir das ganze Sys. starr um ein Stück α längs einer Geraden, der x Achse etwa verschieben: diese Trans^n bilden eine Gruppe, denn eine solche Verschiebung um α und eine um β nacheinander ausgeführt ergeben wieder eine derselben Art um $\alpha + \beta$, und die identische Trans. ist für $\alpha = 0$ darunter enthalten. Bei dieser Verschiebung ändern sich die Geschw^n und daher auch die Fkt^n π_h κ_h ρ_h nicht, so dass wir schliesslich als endliche Gl^n der fraglichen Trans. gruppe erhalten:

$$x_h = X_h - \alpha \qquad y_h = Y_h \qquad z_h = Z_h$$

$$\pi_h = \Pi_h \qquad \kappa_h = K_h \qquad \rho_h = P_h$$

von denen man auch direkt einsieht, dass

sie (4) in sich transformieren. Die Diff Gl$\underline{n}$ der Gruppe sind, da ihre rechten Seiten durch die Koeff$\underline{n}$ von a in dieser Potenzentwickelung nach α gegeb. werden:

$$\frac{dx_h}{d\alpha} = -1 \quad \frac{dy_h}{d\alpha} = 0 \quad \frac{dz_h}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{d\pi_h}{d\alpha} = 0 \quad \frac{d\kappa_h}{d\alpha} = 0 \quad \frac{d\rho_h}{d\alpha} = 0$$

Vergleichen wir das mit (5-$\frac{a}{=}$), so sehen wir, dass wir in der That eine Flkt. ϕ angeben können, deren Ableit$\underline{n}$, wie dort rechts stehen, nämlich:

$$\Phi = \sum_{h=1\cdots n} \pi_h$$

also haben wir es mit einer kanonischen Gruppe in sich zu thun, deren erzeugende Flkt. ϕ ein Int. des Probl. sein muss: wegen (3) ist dies Int.

$$\phi = \sum_h \pi_h = \sum m_h x'_h = \text{Const}$$

also genau das erste Schwerpkts int. in Bezug auf die x-Achse, das wir so aus der allg$\underline{n}$ Th. genommen haben. Das Symbol unserer Gruppe ist nach (5-$\frac{b}{=}$)

$$X = -\sum_h \frac{\partial}{\partial x_h}$$

und daher ist:

$$(\phi, H) = X(H) = -\sum_h \frac{\partial H}{\partial x_h} = \sum_h \frac{\partial U}{\partial x_h}.$$

und das verschwindet in der That, da U nur von den Entfern^{n} r_{hk} abhängt, wie eine leichte Rechnung ergiebt. Genau ebenso lässt H natürlich die Gruppe aller Verschiebungen parallel zu y und z Achse zu, und wir erhalten daraus 2 weitere Schwerpkt Int^{e}:

$$\psi = \sum_{h=1-n} \kappa_h = \sum_h m_h y'_h = \text{Const}$$

$$\chi = \sum_h \rho_h = \sum_h m_h z'_h = \text{Const}.$$

Wir werden von diesen 3 Int. die Poissonschen Klammern bilden, die ja nach einem allg^{n} Satz wieder Int^{e} sind. Wir bilden zunächst

$$(\phi\,\psi) = X(\psi) = -\sum_h \frac{\partial \psi}{\partial x_h} = 0$$

und ebenso verschwinden alle Klammern identisch, so dass wir aus diesen Schwerpkts integ^{n} durch Zusammensetzung nichts neues erhalten.

Wir ~~hatten~~ früher unter den gleichen Bed^{n} ~~stets~~ noch das Bestehen dreier weiterer Int^{e} vom Typus

$$\sum m_h x_h = \alpha t + \beta$$

gefolgert, die aus jenen dreien durch ein-

-malige Integration hervorgingen. Diese Sätze können wir aus der Form der Th. wie wir sie entwickelten, unmittelbar nicht herleiten, da wir das explte Auftreten von t stets ausschlossen. Man kann aber mit genau denselben Gedanken die Theorie auch auf diesen Fall ausdehnen, indem man t den Unbekannten als wesent. gleichberechtigt behandelte, und man würde dann finden, dass dies Int. einer Gruppe von Translationen des Sys. um Strecken αt längs der x-Achse entspricht, die H gleichfalls in sich überführen. Ganz ähnlich kann man nun auch die Flächensätze behandeln, und findet, dass auch sie gewissen unmittelbar erkennbaren Gruppen kanon. Transf. des Sys. in sich entsprechen. Um diese zu erkennen, wollen wir hier den umgekehrten Weg als soeben gehen, und fragen, welche Gruppe zu dem bekannten Flächenint. in Bezug auf die z-Achse gehört.

$$\phi = \sum_h m_h (x_h y_h' - y_h x_h') = \text{Const.}$$

oder in den $6n$ kan. Fkt. geschrieben nach (3):

$$\phi = \sum_h (x_h \kappa_h - y_h \pi_h) = \text{Const}$$

Das Symbol der Gruppe ist nach (5-b)

$$X = \sum_h \left(K_h \frac{\partial}{\partial \pi_h} - \pi_h \frac{\partial}{\partial K_h} + y_h \frac{\partial}{\partial x_h} - x_h \frac{\partial}{\partial y_h} \right)$$

und als gewöhnliche Diff.-Gln. der Gruppe ergeben sich:

$$\begin{cases} \frac{d\pi_h}{d\alpha} = k_h & \frac{dk_h}{d\alpha} = -\pi_h & \frac{d\varphi_h}{d\alpha} = 0 \\ \frac{dx_h}{d\alpha} = y_h & \frac{dy_h}{d\alpha} = -x_h & \frac{dz_h}{d\alpha} = 0 \end{cases}$$

und die endlichen Gln. der Transf. sind:

$$\begin{cases} \pi_h = \Pi_h \cos\alpha + K_h \sin\alpha, & k_h = K_h \cos\alpha - \Pi_h \sin\alpha \\ x_h = X_h \cos\alpha + Y_h \sin\alpha & y_h = Y_h \cos\alpha - X_h \sin\alpha \\ \varphi_h = \Phi_h & z_h = Z_h \end{cases}$$

denn diese Fktn. genügen den Diff.glgn. und ergeben für $\alpha = 0$ die Identität. Würde man $\cos\alpha$ $\sin\alpha$ in eine Potenzreihe entwickeln, so erhielte man gerade die früher gegebene allg. Potenzentwickelung § 15 (11a)

$$\pi_h = \Pi_h + \alpha\, X(\Pi_h) + \frac{\alpha^2}{2}\, X\, X(\Pi_h) + \cdots \text{ etc}$$

Die Formeln stellen ersichtlich in der zweiten Zeile die Drehungen des Raumes um die z-Achse durch den Winkel α dar, während sich die Transf. der π daraus durch die Beziehung (3): $\pi_h = m_h x'_h$ $\Pi_h = m_h X_h$ ergibt, so dass wir sie wohin nur mit

Pkt. transf$^{\underline{n}}$ zu thun haben. Wir können direkt erkennen, dass diese Drehungen das Prob. in sich überführen, denn U hängt nur von den Entfern$^{\underline{n}}$ r_{hk} ab, die bei Drehungen invariant bleiben, und auch T geht wegen $\pi_h^2 + \kappa_h^2 = \Pi_h^2 + K_h^2$ in sich über.
Das geht auch aus dem allg$^{\underline{n}}$ Criterium hervor denn es ist:

$$(\phi H) = X(H) = -\sum_h \frac{1}{m_h}(\kappa_h \pi_h - \pi_h \kappa_h) + y_h \frac{\partial U}{\partial x_h} - x_h \frac{\partial U}{\partial y_h}) = 0$$

da U nur von den r_{hk} abhängt, und daher wie eine leichte Rechnung ergiebt

$$+ y \frac{\partial U}{\partial x_h} - x_h \frac{\partial U}{\partial y_h}$$ verschwindet.

Ebenso bemerken wir nun, dass das Sys. auch durch die Gruppe der Drehungen um die x-achse in sich übergeht, und das giebt das zweite Flächenint.:

$$\psi = \sum (y_h \rho_h - z_h \kappa_h) = \text{Const.}$$

als erzeugende Fkt. dieser kanon$^{\underline{n}}$ Gruppe.
In dem Poissonschen Klammerausdruck $(\phi \psi)$ müssen wir nun wieder ein Int. der Beweg. Gl$^{\underline{n}}$ erhalten: es ist:

$$(\phi \psi) = X(\psi) = \sum_h (\pi_h z_h - x_h \rho_h)$$

und das ist in der That ein von den beiden

ϕ 4 unabh.$^{\underline{e}}$ Int., allerdings aber das bekannte dritte Flächen int. in Bezug auf die y-Achse. Durch die weiteren Klammern der 3 Flächenint$^{\underline{e}}$ würde man also nichts Neues, sondern immer wieder Flächenint$^{\underline{e}}$ erhalten, und ebensowenig ergäben sich neue Int$^{\underline{e}}$, wenn man sie mit den Schwerpkts. sätzen zusammensetzte. Das erklärt sich gruppen ~~theoretisch~~ daraus, dass die Gruppen der Verschiebungen und Drehungen des Raumes, zu denen diese Int$^{\underline{e}}$ gehören, zusammen wieder eine Gruppe, die der Beweg$^{\underline{n}}$ bilden, d. h. bei Zusammensetzung keine wesent. neuen Transf$^{\underline{n}}$ ergeben.

Einen andern wichtigen Weg zur Integration der dynamischen Gl$^{\underline{n}}$ bietet der Zusammenhang mit der Jacobi-Hamil$^{\underline{en}}$ partiellen Diff Gl$^{\underline{n}}$, den wir auch in § 15 hergeleitet ~~hatten~~. Sie lautete dort (7$^{\underline{b}}$)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = H\left(\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial z}\; y\; z\right)$$

und wird also in unserm mechanischen Prob. heissen:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sum_{h=1\cdots n}\frac{1}{m_h}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_h}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y_h}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z_h}\right)^2\right)-U(x_1\cdots z_n) \qquad (6)$$

ist also eine partielle Diff gl. 1 Ord.

für die Flt. F der $3n+1$ unabh.^{n} $t, x, \ldots z_n$.
Das Hauptthorem war, dass jede einen Parameter a enthaltende Lösung F ein Int.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \text{Const.}$$

der Beweg.^{e} Gl.^{n} ergiebt, so dass mit der Kenntnisse einer $3n$-parametrigen Lösung die Beweg.^{e} Gl.^{n} vollständig integriert sind.
Ich kann auf diese eigentliche Jacobi-Hamil. Theorie deren Grundgedanken in § entwickelt sind, hier nicht mehr näher eingehen; sie ist auf das eingehendste in Jacobi's "Dynamik" behandelt und angewendet, deren Studium ich hierfür empfehle.

§ 17. Anwendung der Var. Rech. auf die Integral Principe.

Wir wollen nun die in § vorgenommenen allg.^{n} Umformungen eines Var. prob.^{s} auf das Hamil.^{e} Prin. der Mechanik anwenden. Dadurch werden wir insbesondere auch wieder das Eulersche und Jacobische Prin. erhalten.

Wir gehen von dem Hamil. Prin. für die n unabh.^{n} Par. eines Pkt. sys. aus.

(1) $$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(p_1', \ldots p_n', p_1, \ldots p_n, t)\, dt = \text{Min.}$$

Zur Conkurrenz stehen alle Beweg^{n}, die zur Zeit t_1 vom Orte $A(p_1^{(1)}|\cdots|p_n^{(1)})$ ausgehend zur Zeit t_2 am Orte $B(p_1^{(2)}|\cdots|p_n^{(2)})$ anlangen. Es ist:

$$\mathfrak{L} = T - U \quad \text{wo} \quad T = T\left(\frac{dp_1}{dt} \cdots \frac{dp_n}{dt}\right)$$

eine homogene quad. Fkt. dieser n Ableit^{n} ist, die von $p_1 \cdots p_n$ beliebig abhängt, während U nur von $p_1 \cdots p_n$ irgendwie abhängt.

Wir wollen nun annehmen, dass $\mathfrak{L}$ <u>die Zeit t nicht explicit enthält</u>. wollen wir dann unsere frühere Theorie anwenden §(15), wie man eine im Var. prob. nicht selbst auftretende Koordinate elimin. so müssen wir t den andern Unbekannten künstlich gleichstellen. Dazu führen wir eine im Intervall $(T_1\ T_2)$ laufende Hülfsvariable T ein, als deren Fkt. wir $t, p_1 \cdots p_n$ darstellen:

$$t = t(T) \quad p_1 = p_1(T) \cdots p_n = p_n(T)$$

so dass $t(T_1) = t_1$, $t(T_2) = t_2$ und daher die p für $T = T_1$ bezw. T_2 den Ort A bezw. B ergeben. Bezeichnen wir dann die Ableit^{n} nach T mit Accenten, so wird:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{p_1'}{t'} \cdots \frac{dp_n}{dt} = \frac{p_n'}{t'} \quad (3^{a})$$

und daher die homogen quad. Fkt.:

(3^b) $T = T\left(\frac{dp_1}{dt} \cdots \frac{dp_n}{dt}\right) = \frac{1}{t'^2}\, T(p_1' \cdots p_n')$

das Var. prob. geht also über ein:

(T) $$\int_{\tau_1 t_1 A}^{\tau_2 t_2 B} \left\{ \frac{1}{t'} T(p_1' \cdots p_n') - U(p_1 \cdots p_n)\cdot t' \right\} d\tau = \text{Min}$$

das ist nur eine formale Umschreibung des Hamil. Prin^s in eine homogene Form. Die unabh.^e Variable ist τ, die unbek^n Fkt^n sind $t, p_1 \cdots p_n$ und von t kommt nur die Ableit., nicht es selbst vor. In dem in § 15 behandelten Probl^e:

$$\int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} F(y' z' y)\, dx = \text{Min}.$$

tritt also jetzt τ an die Stelle von x, t an die von z und für y treten n Fkt^n $p_1 \cdots p_n$ ein, während $F = \frac{1}{t'} \cdot T - U t'$ wird. Ein Int. der Lagran^n Gl^n wird also:

$$\frac{\partial F}{\partial t'} = -\frac{1}{t'^2} \cdot T(p_1' \cdots p_n') - U = \text{Const} = -\mathcal{E}$$

oder wegen (3^b) wenn wir die Constante gleich $-\mathcal{E}$ setzen:

(4) $$T + U = \mathcal{E}$$

das ist aber gerade das Energieint. Geben wir nun einen bestimmten Wert

E der Integrationskonst. $\underline{n}$, so ist aequiv. mit dem Hamil $\underline{n}$ Prin. das Var. prob. (15) des §(15) das dort:

$$\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \{ F(y' z' y) - e z' \} dx = \text{Min.}$$

lautete, und hier also

$$\int_{\tau_1 A}^{\tau_2 B} \{ \tfrac{1}{t'} T(p_1' \dots p_n') - U t' + E t' \} d\tau = \text{Min.}$$

heisst, wo also die Randwerte von t nicht mehr gegeben sind. Führen wir wieder $t = t(\tau)$ als Int.$\underline{ne}$ variable ein, so lautet das Prin:

Ein Pkt. sys. bewegt sich so, dass verglichen mit allen andern den Zwangs bed $\underline{n}$ (aber keiner andern Nebenbed $\underline{n}$!) genügenden Beweg. die vom selben Anfangsort A in irgend einer Zeit zum selben Endort B führen das Int.

$$\int_A^B \{ T - U + E \} dt = \text{Min.} \qquad (5)$$

wird, wo E der etwa im Anfangsort A gegebene Wert der Totalenergie ist.

Da U in A einen festen Wert hat, ist E auch gegeben, wenn man die im Anfangsort zur Verfügung stehende kinet. Ener. kennt.

355-1

Aus dem Prin. folgt, wie wir ja allg. schon wieder genau das Integ. (4) mit dem gegeb.^{n} Wert $\mathcal{E}$ der Konst.^{n}, d. h. es folgt dass die Total ener konstant gleich dem anfangs gegeb.^{n} Werte bleibt. Es liegt hier also ein neues Prin. der Mechanik vor, dass im Gegensatz zu dem Euler – Maupertuischen den Energ. satz nicht als Nebenbed. enthält, und das zwis. ihm und dem Hamil.^{n} die Mitte hält. Das Prin. bestimmt die Beweg. vollkommen, die Zeit noch bis auf eine additiv konstante, die bestimmt wird, wenn man die Zeit $t = t_1$ giebt, zu der das Sys. von A ausgeht (vgl S. 386) – Da $\mathcal{E}$ konst. ist kann man (5) auch schreiben:

$$\int_A^B (T - U)\,dt + \mathcal{E}(t - t_1) = \text{Min}.$$

wo $t - t_1$ die noch unbekannte Zeit ist, die das Sys. für seinen Weg von A nach B braucht. Zum Hamil. Prin. gelangt man nun zurück, wenn man die Zeit $t - t_1$ der Beweg. giebt, dann bleibt die ursprüngliche Min. Forderung $\int_1^2 (T - U)\,dt = \text{Min.}$, deren Aequiv. mit unserem Prin. ja aus der allg.^{n} Th. folgt. Andererseits gelangen wir gerade zu dem Eul. Mauf. Prin., wenn wir das aus (5)

bereits folgende Int.

$$T + U = \mathcal{E}$$

noch besonders als Nebenbed. hinzufügen. Ersetzen wir im Integranden noch $\mathcal{E} = T + U$ so erhalten wir als das dem Prob. (16$^{\underline{a}}$) des § (15) (S. 389), das dem ursprünglichen ja wieder aequiv. war, entsprechende Prin.:

$$2\int_A^B T\,dt = \text{Min. während } T + U = \mathcal{E} \quad (6)$$

ein Prin. mit Nebenbed.: zur Concurrenz stehen alle Fkt$^{\underline{n}}$, die (hier numerisch ~~gebe~~ gegeb$^{\underline{n}}$ Werte von $\mathcal{E}$) dieser genügen, und von dem gegeb. Orte A zu irgend einer Zeit nach dem B führen. Das ist genau das Prin. von Eul. Maupértuis das wir es in übersichtlichster Weise aus der allg$^{\underline{n}}$ Theorie hergeleitet haben. Endlich leiten wir noch das dem Var probl$^{\underline{e}}$ (17) des § entspr. Prin. her, indem wir aus der Nebenbed. von (6) die ausgezeichnete Koordinate t elimin. Dazu gehen wir am bequemsten wieder auf die am Anfange dieses Paragraphen benutzte homogene Schreibweise mit der Var. τ zurück. Dann lautet die Nebenbed.:

$$\frac{1}{t'^2} \cdot T(p_1' \dots p_n') + U = E$$

heraus haben wir t' zu berechnen:

$$t' = \sqrt{\frac{T}{E-U}}$$

und das ist in das Int. (6) einzusetzen:

$$\int_A^B T \cdot dt = \int_A^B \frac{1}{t'} \cdot T \, d\tau = \int_A^B \sqrt{(E-U) T} \, d\tau$$

und damit haben wir genau das Jacobische

Prin. $\int_A^B \sqrt{(E-U) \cdot T} \, d\tau =$ Min.

(8)

wo nur noch die Koord. $p_1 \dots p_n$ und ihre Ablt. nach τ vorkommen; $\sqrt{T}$ aber homogen linear in $p_1' \dots p_n'$ ist, und das Int. nicht verändert, wenn man für τ eine Fkt. von τ substituiert: das Var. Prob. bestimmt also nur den Zusammenhang der $p_1 \dots p_n$ untereinander, da τ z. B. herausfällt, wenn man $p_1 \dots p_1(\tau)$ als Integrationsvariable einführt. In diesem Prin. ist also die Zeit t vollkommen eliminiert, es handelt sich nur um die geom. Bahnen der Pkte. bezw. um die eine Bahnk. des Syst. in dem n-dimensionalen Raume der $p_1 - p_n$, die aus der gegeb. Lage A in die B führt und die ohne Rücksicht auf den zeitlichen Verlauf

durch das Jacobische Prin. (8) bestimmt wird. Der Ablauf der Beweg. in der Zeit bestimmt sich nachträglich durch

$$t = \sqrt{\frac{T}{E - U}} \text{ bezw. } T + U = E$$

Wir kommen auf die frühere Schreibweise des Jacob. Prin^s zurück, wenn wir eine verallgemeinerte "Bogenlänge" s im Raume der $p_1 --- p_n$ durch

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = T(p_1' --- p_n')$$

einführen; dann geht (8) in die einfachere Form:

$$\int_A^B \sqrt{E - U} \cdot ds = \text{Min} \qquad 8^a$$

über, wo der Integrand nur noch von $p_1 -- p_n$ abhängt. Wollen wir aber s als unabh. Var. behandeln, so müssen wir noch die aus seiner Def. für $\tau = s$ folgende charakteristische Gl.

$$T\left(\frac{dp_1}{ds} \cdots \frac{dp_n}{ds}\right) = 1 \qquad (8^b)$$

als Nebenbed. hinzufügen, da diese erst den Faktor $\sqrt{T}$ aus dem Int. wegzulassen gestattet.

Diese Untersuchung^n bezogen sich auf die Elim. der im allg^n als Integrations Var. betrachteten Zeit t. Man kann die allg^e Th. natürlich ebenso auch auf die Elim. einer Koordinate p_n anwenden, falls diese nicht vor

-kommt, unterhält da ganz unmittelbar die modificierten Prinz^{e}. Wir werden darauf in einem andern Zusammenhang genauer einzugehen haben.

Hier will ich nur noch Beispiele für den allg^{sten} Fall der Elim. mit Hilfe eines beliebigen Int. bringen und zwar werde ich mich wieder auf die Flächen und Schwerpkte-sätze beziehen. Ein Beispiel für die genaue Anwendung der allg^{n} Theorie soll zunächst der Flächensatz liefern, um die Rechnung zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall eines in der $y-x$ Ebene beweglichen Massenpkts. in einem Centralkraftfeld vom Pot. $U(x^2+y^2)$; dann ist die Lagra^{n} Fkt. (vgl § 1b (2))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 - U(x^2+y^2))$$

und die Hamil. Fkt. wird [§ 1b (4)]

$$H = -\frac{1}{2m} (\pi^2 + k^2 - U(x^2+y^2))$$

Es gilt dann bekanntlich das Schwerpkt.

(9 $\underline{a}$) mit. $$G(\pi\, k\, y\, x) \equiv x.k - y.\pi = g$$

Wir wollen nun eine kanon^{e} Sub. angeben die dies in $K = g$ überführt, und das nach Elim. von k und y hiernach übrigbleibende Var. prob. für Π X aufstellen, indem wir auf die Bestimmung von y verzichten. Dazu

gehen wir, genau wie am Ende von §15 von der S. ub. F. lit.

$$A = x \cdot X$$

aus, und setzen (wie dort (19 d))

$$\pi = \frac{\partial A}{\partial x} = X \qquad k = \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

$$\Pi = -\frac{\partial A}{\partial X} = -x \qquad K = g = x \cdot k - y\pi$$

Daraus ergiebt sich durch Auflösen

$$X = -\Pi \qquad y = -\frac{g}{\pi} = \frac{-g}{X}$$

sodass H übergeht in

$$H = -\frac{1}{2m} X^2 - U\left(\Pi^2 + \frac{g^2}{X^2}\right) = H(\Pi, X)$$

Das gesuchte Var. prob. lautet also:

$$\int_1^2 \left\{ \Pi X' - \frac{1}{2m} X^2 - U\left(\Pi^2 + \frac{g^2}{X^2}\right)\right\} dx = \text{Max-Min} \quad (9 \tfrac{f}{=})$$

Will man hierzu das gewöhnliche Min. prob. bilden, so hat man aus der ersten Var. ableit. nach Π:

$$X' - U'\left(\Pi^2 + \frac{g^2}{X^2} \cdot 2\Pi\right) = 0$$

Π durch $X\ X'$ auszudrücken und in $H(\Pi\ X)$ einzusetzen; das Elim. resultat $H = f(X'X)$ kann schon recht kompliziert werden, da Π im Argument der

beliebigen Fkt. U auftritt. Ganz analog kann man bei dem Schwerpktz. int. verfahren; nur wird man eine etwas allg.re Sub. Fkt. A als bisher wählen müssen, um mit dem die Koordinaten selbst nicht enthaltenden Int. $\sum_{h=1}^{n} \pi_h = g$ die Elim. aus den Sub. gl.n (19e) vollziehen zu können (etwa $A = x_1 X_1 + x_1 x_2$ bei 2 Massenpkt.n zur Elim. von $X_2 \Pi_2$)

Wir können nun aber in beiden Fällen die Reduktion des Probl.s in einfacherer Weise vollziehen, wenn wir uns den Umstand zu Nutze machen, dass wir die zu diesen Int.n gehörigen Transf. gruppen vollkommen kennen (vgl. –) und dass wir daher auch eine Koord.n transf. angeben können, die sie in Gruppen von Verschiebung.n (Addition eines Parameters zu einer der Koord.n während die andern konst. bleiben) überführen. Da das fragliche Int. erzeugende Fkt. der Gruppe ist, nimmt es in diesen neuen Koord.n dann wieder die einfachste Form, etwa $G = K$ an, und damit ist das Ziel erreicht. Bei unseren beiden Int.n erzielen wir durch diese Überlegung insofern eine Vereinfachung als es sich

bei ihnen um gewöhnliche Pkt. transf.en (Verschiebungen oder Drehungen des Raumes) handelt, und wir daher bereits an dem ursprünglichen Var. prob. (Hamil. Prin.) operieren können, ohne die Π, κ, S einführen zu müssen. Es kommt dann alles darauf hinaus, Koord.n transf.n ~~aufz~~ anzugeben bei denen eine der $3n$ Koord.n selbst aus der Lagra.n Flt. L herausfällt, und nur ihre Ableit. von L nach dieser muss dann gerade das fragliche Int. sein, und so dann können wir uns genau wie in der allg.n Th. durch Elim. ein neues (das Jacobische) Var. prob. herstellen. Um zunächst so auf das Schwerpkts. int. zu kommen, sub. wir als neue Var.

$$x_1 \qquad \xi = x_2 - x_1 \qquad \xi' = x_3 - x_1 \qquad \cdots \qquad \xi^{(n)} = x_n - x_1$$

die dem Schwerpkts. int. entsprechende Gruppe wird dann in der Tat durch $x_1 = X - \alpha$, $\xi''' = \text{Const.}$ dargestellt, da sie in den alten Koord.n $x_h = X_h - \alpha$ lautet (vgl. –) Die Lagra.n Flt.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{h=1 \dots n} m_h {x'_h}^2 - U(r_{hk}) \qquad (10^a)$$

in der wir der Bequemlichkeit halber $y_h = z_h = 0$ setzen, geht dann über in,

(10a) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 x_1'^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2\cdots n} m_k (x_1' + \xi_k')^2 - U(\xi_2 \cdots \xi_n)$$

denn U hängt nur von den Entfernungen der Pkte untereinander und diese nur von den Koord.differenzen $x_h - x_1 = \xi_h$, $x_k - x_i = \xi_k - \xi_i$ $(ik \neq 1)$ ab. $\mathcal{L}$ enthält also x_1 nicht mehr, und daher haben die Var. ableitungen von $\int \mathcal{L}\, dt$ das Int.

(10b) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1'} \equiv m_1 x_1' + \sum_{k=2\cdots n} m_k (x_1' + \xi_k') \equiv x_1' \cdot \sum_{h=1\cdots n} m_h + \sum_{k=2\cdots n} m_k \xi_k' = g,$$

was wegen der Def. der ξ genau des Schwerpkt.int $\sum_{h=1\cdots n} m_h x_h' = g$ ist. Wir können nun sofort alle früher allg. behandelten dem Hamil. Prin. aequiv. Prin.e aufstellen; wir begnügen uns hier jedoch mit der Angabe des durch vollständige Elim. von x_1 entstehenden Min. probl. der ursprüngl. Art für $\xi_2 \cdots \xi_n$ ((17) des § 15): ein Integrand wird wenn man x_1' aus $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1'} = g$ ausrechnet und $M = \sum_{h=1\cdots n} m_h$ setzt:

$$\mathcal{L} - g\cdot x_1' = -\frac{1}{2} x_1'^2 \cdot M + x_1'(M x_1' - g) + x_1' \sum_{k=2\cdots n} m_k \xi_k' + \frac{1}{2}\sum m_k \xi_k'^2 - U = -\frac{1}{2M}\Big(g - \sum_{k=2\cdots n} m_k \xi_k'\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum m_k \xi_k'^2 - U$$

so dass sich die $n-1$ Unbek^n ξ bestimmen aus:

$$\int_{t_1,\ \xi^{(1)}_k}^{t_2,\ \xi^{(2)}_k} \left\{ -\frac{1}{2M}\Big(g - \sum m_k \xi'_k\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum m_k \xi'^{2}_k - U(\xi) \right\} dt = \text{Min} \qquad (10^a)$$

Die Ableit^n ξ'_k treten hier auch linear und auch mit gemischt quad. Termen auf. x_1 bestimmt sich nachträglich durch Quadratur aus

$$M \cdot x'_1 + \sum m_k \xi'_k = g$$

Das ist für das Schwerpkts. int. genau das, was das Jacobische Prin. für das Ener. int. ist.

Ich will nun noch kurz die gleichen Betrachtungen für das Flächenint. angeben:

$$\sum m_h (x_h y'_h - y_h x'_h) = g$$

wir führen zunächst Polarkoord^n ein:

$$x_h = r_h \cos \varphi_h \qquad y_h = r_h \sin \varphi_h$$

und führen statt der φ_h ein die Differenz:

$$\varphi_1, \quad \vartheta_2 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \vartheta_3 = \varphi_3 - \varphi_1 \ldots \vartheta_n = \varphi_n - \varphi_1;$$

die zum Flächenint. gehörige Gruppe wird dann wieder einfach durch $r_h = R_h$ $\vartheta_k = \Theta_k$ $\varphi_1 = \Phi - \alpha$ dargestellt. Die Lagra^e Fkt.

in der wir $z_h = 0$ setzen:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{h=1\ldots n} m_h (x'^2_h + y'^2_h) - U(r_{12} \ldots r_{n-1,n})$$

geht, da die Entfernungen r_{hk} nur von den Radiusvektoren r_h und den Winkeldifferenzen ϑ_k abhängen, über in:

321

11ᵃ $$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} m_1 (r_1'^2 + r_1^2 \varphi_1'^2) + \sum_{k=2\ldots n} \frac{1}{2} m_k \left(r_k'^2 + r_k^2 (\varphi_1' + \vartheta_k')^2\right) - \mathfrak{U}(r_h, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n)$$

enthält also φ_1 selbst nicht. Daher ergiebt sich das Int.:

11ᵇ $$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_1} = m_1 r_1^2 \varphi_1^2 + \sum m_k r_k^2 (\varphi_1' + \vartheta_k') = \varphi_1' \sum_{h=1\ldots n} m_h r_h^2 + \sum_{k=2\ldots n} m_k r_k^2 \vartheta_k' = g,$$

was offenbar gerade das obige Flächen Int. ist. Nun wieder das analogen des Jacobischen Prin.ᵃ zu erhalten, berechnen wir daraus

$$\varphi_1' = \frac{1}{R}\left(g - \sum_{k=2\ldots n} m_k r_k^2 \vartheta_k'\right) \text{ wo } R = \sum_{h=1\ldots n} m_h r_h^2$$

und bilden damit

$$\mathfrak{L} - g \cdot \varphi_1' = \sum_{h=1\ldots n} \frac{1}{2} m_h r_h'^2 - \frac{1}{2} \varphi_1'^2 R + \varphi_1'(R\varphi_1' - g) + \sum_{k=2\ldots n} m_k r_k^2 \varphi_1' \vartheta_k + \sum_h \frac{1}{2} m_k r_k^2 \vartheta_k^2 - \mathfrak{U}$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_h r_h'^2 - \frac{1}{2R}\left\{g - \sum_k m_k r_k^2 \vartheta_k'\right\}^2 + \sum_k \frac{1}{2} m_k r_k^2 \vartheta_k'^2 - \mathfrak{U}$$

und daher lautet das gesuchte Variations-Prin. für die $2n-1$ Unbekannten $r_1 - r_n$, $\vartheta_2 - \vartheta_n$:

11ᶜ $$\int_{t_1,\, r_h^{(1)} \vartheta^{(1)}}^{t_2,\, r_h^{(2)} \vartheta^{(2)}} \left\{\frac{1}{2} \sum m_h r_h'^2 - \frac{1}{2R}\left(g - \sum m_k r_k^2 \vartheta_k'\right)^2 + \sum_k \frac{1}{2} m_k r_k^2 \vartheta_k'^2 - \mathfrak{U}(r_h, \vartheta_k)\right\} dt = \text{Min.}$$

während das Flächen Int. nachträglich φ, ergiebt. Die Form dieses Princips ist ganz analog der des vorigen: die ϑ' treten auch linear auf

§18 Die Lagran^e Fkt.

Wir wollen uns nun näher dem Studium der in dem Integranden des Hamil. Prin. stehenden Lagran^n Fkt. zuwenden und werden dabei auf die mannigfach^n Beziehungen der modernen Mech. zur Physik und Chemie kommen: freilich werde ich mich hier meist auf Andeutungen beschränken müssen. Haben wir ein Sys. von n Pkt^n, deren sämmtliche $3n$ Kord^n $x_1 \dots z_n$ sichtbar sind, d. h. die von uns beobachtet und verfolgt werden können und sollen, so wird die Bewegung geliefert durch die Min. forderung:

$$\int_{t_1 A}^{t_2 B} \mathfrak{L}\, dt = \int_{t_1 A}^{t_2 B} (T - U)\, dt = \text{Min.}$$

daher zerfällt die Lagran^e Fkt. $\mathfrak{L}$ in 2 deutlich getrennte Bestandteile eine quad. Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1 \dots n} m_h (x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2)$$

der Geschwindigkts. komponenten mit

konstanten Koeff^n, der Massen, und eine Fkt. der Koord^n $x_1 \dots z_n$ allein, das sind kinetische und potentielle Ener.. Im Falle von Nebenbed.^n hatten wir unabhängige Par. $p_1 \dots p_n$ (Freiheitsgrade) statt der Koord^n eingeführt: dann wurde T eine quad. homo. Fkt. der Ableit^n p' deren Koeff^n aber beliebig noch von $p_1 \dots p_n$ abhängen konnten:

$$T = \sum_{i,k=1 \dots n} a_{ik}(p_1 \dots p_n) \cdot p'_i \dots p'_k$$

während U allein eine Fkt. der p blieb: die bestimmte Spaltung von L blieb also erhalten.

Nun findet man in der Physik vielfach Vorgänge mit endlich vielen Freiheitsgraden $p_1(t) \dots p_n(t)$, die sich durch ein Variationsprob. genau der Hamil. Form

$$\int_{t_1, p_n^{(1)}}^{t_2, p_n^{(2)}} L(p'_1 \dots p'_n, p_1 \dots p_n)\, dt = \text{Min.}$$

oder – was auf dasselbe hinauskommt – durch Bewegungsgl^n der Lagra^n Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial p'_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_n} = 0$$

beschreiben lassen, nur dass jetzt L

keineswegs mehr in der beschriebenen Weise in 2 getrennte Bestandteile direkt zerfällt, sondern irgend eine Fkt. der p und p' ist. Es kann aber auch vorkommen, dass man aus physikalischen Überlegungen Anlass zu einer analogen Spaltung in kinetische Ener. T und pot. U hat, während diese Ausdrücke eine ganz andere Form, als die oben angegeb^n haben, etwa T die Ableit^n p' nicht nur quad. sondern auch linear, oder in höheren Potenzen oder gar transcendent enthält; andrerseits hatten wir ja sogar in der Mech. schon Beispiele von Kräften, die auch von den Ableit^n abhängen. Ich will für solche physikalischen Probl. bald zwei Beispiele geben, deren erstes das früher schon öfter angezogene Webersche Gesetz der Elektrodynamik sein soll. Für die Bewegung eines Punktes unter diesem Gesetze hatten wir schon früher ein Var. Princip aufgestellt (§ 11); es ~~handelt~~ lautete, wenn wir mit e_2 die Masse des im Nullpunkt festen, mit e_1 die des beweglichen Teilchens bezeichnen.

$$\int_{t_1 x_1 y_1 z_1}^{t_2 x_2 y_2 z_2} \left(\frac{e_1}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{e_1 e_2}{r} (1 + r'^2) \right) dt = \text{Min}$$

I

Die Lagran= Fkt. hat hier einen Summanden T genau von der alten Form der kinetischen Ener., während der andere

$$W = \frac{e_1 e_2}{r}(1 + r'^2)$$

noch von den Ableit= abhängt. Wir können hier sofort sehen, dass ein Ener. int. existieren muss; da L die Unabhängige t nicht enthält ergiebt sich das, was wir früher durch eine mühsame Rechnung herleiten mussten, nach den allgemeinen Sätzen der Var. Rech. sofort als die Hamil. Fkt.

$$H = L - x'\frac{\partial L}{\partial x'} - y'\frac{\partial L}{\partial y'} - z'\frac{\partial L}{\partial z'}$$

und da nur die Glieder

$$\frac{e_1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{e_1 e_2}{r} r'^2$$

die $x' y' z'$ enthalten und in ihnen quad. homogen sind, finden wir H aus L, indem wir das Vorzeichen dieser Glieder umkehren, sodass das Int. lautet:

$$-H = \frac{e_1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{e_1 e_2}{r}(1 - r'^2) = \text{Const.}$$

genau, wie wir es früher hatten. Das hat also nicht die Form $T + W = \text{Const.}$ wie man wegen $L = T - W$ nach Analogie der früheren vermuten könnte, sondern

an Stelle von W tritt, da es selbst die Ableitungen enthält, $U = \frac{e_1 e_2}{r}(1 - r'^2)$, das demnach eigentlich als potentielle Energie zu bezeichnen wäre. Fügen wir das Energieintegral mit gegebener Konstante $\mathcal{E}$ als Nebenbedingung hinzu, so erhalten wir ganz nach den allgemeinen Principien das dem Euler'schen analoge Princip mit dem Integranden $\mathcal{L} - H$:

$$\int_{t_1 x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \left(\frac{e_1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{e_1 e_2 r'^2}{r} \right) dt = \mathrm{Min.}$$

während $T + \frac{e_1 e_2}{r}(1 - r'^2) = \mathcal{E}$.

Dass das angegebene Var. Prin. wirklich auf die Bewegungsgleichungen des Weberschen Gesetzes führt, hatten wir früher schon gezeigt; denn die Var. ableitungen lauten:

$$e_1 x'' - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{etc.}$$

und wir hatten wegen

$$r = x^2 + y^2 + z^2 \qquad r_1 = \frac{x x' + y y' + z z'}{r}$$

gefunden

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial x'}\right) - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'}, -\frac{\partial W}{\partial r}\Big) \cdot \frac{x}{r} \quad \text{etc.}$$

und diese Var. ableitung ~~von~~ W nach r war gerade der charakteristische Faktor

des Weberschen ~~Gesetz~~ Gesetzes:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'} - \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{e_1 e_2}{r^2}(1 - r'^2 + 2 r r'')$$

sodass wir genau die bekannten Gl^n dieses erhalten:

$$e_1 x'' = \frac{e_1 e_2 x}{r^3}(1 - r'^2 + 2 r r'') \text{ etc.}$$

Ein zweites Beispiel entnehme ich den neuesten Theorien der Elektrodynamik; da wird die Bewegung eines Elektrons, d. i. eine kleine starre Kugel mit einer durch den Faktor μ gegebenen Ladung, ohne Einwirkung äusserer Kräfte bestimmt wieder durch ein Var. Prob.

$\int^2 \mathfrak{L}\, dt = \text{Min.}$, wo aber $\mathfrak{L}$ die eigentümliche Gestalt hat. (So zuerst angegeben von Abraham)

$$\mathfrak{L} = \mu\left\{\frac{v^2-1}{v}\, l\, \frac{1+v}{1-v}\right) \quad \text{wo } v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Es ~~tritt~~ tritt also an Stelle des einfachen Ausdruckes $\frac{m}{2}v^2$ bei der kräftefreien Bewegung eines gewöhnlichen Massenpkts. Die Bewegungsgl^n sind also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x'} = 0 \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y'} = 0 \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z'} = 0$$

oder wenn noch eine äussere Kraft ~~hinzutritt~~, d. h. eine Kräfte Fkt.

$-U(x\,y\,z)$ additiv zu $\mathfrak{L}$ im Integrand^n des Var. principes hinzutritt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = -\frac{\partial U}{\partial x} = X \text{ etc.}$$

Die linken Seiten werden, da in

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{\partial L}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial L}{\partial v}\cdot\frac{x'}{v} \text{ etc.}$$

$x\,y\,z$ selbst nicht vorkommen, linear homogen in $x''\,y''\,z''$ so dass die Gl^n lauten:

$$m_{11}x'' + m_{12}y'' + m_{13}z'' = X \text{ etc.}$$

wo die 9 Faktoren $m_{11} \cdots m_{33}$ der Beschleunigungen von den Geschwindigkt^n $x'y'z'$ wesentlich abhängen. Vergleicht man das mit den Gl^n der gewöhnlichen Mech. $m x'' = X$ etc. so kommt man zu der Ausdrucksweise, dem Elektron eine Masse zuzuschreiben, die sich in verschiedenen Richtungen verschieden äussert (longitudinale und transversale Masse) und die obendrein nicht konstant ist sondern von der Geschwindigkt. abhängt.

Eine Spaltung von L in 2 Bestandteile nach Art d. Mech. ist hier durchaus nicht unmittelbar ersichtlich; die Physik führt dazu, als kinetische und potentielle Ener. zu bezeichnen:

$$T = \mu\left(\frac{1+v^2}{2v}\, l\, \frac{1+v}{1-v} - 1\right)$$

$$U = \mu\left(\frac{3-v^2}{2v}\, l\, \frac{1+v}{1-v} - 1\right)$$

Die Negativsumme dieser beiden sind in der Tat gleich der zu $\mathfrak{L}$ gehörigen Hamil. Fkt.:

$$H = \mathfrak{L} - x'\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x'} - y'\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y'} - z'\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z'}$$

$$= \mathfrak{L} - v\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v} = 2 - \frac{2}{v}\, l\, \frac{1+v}{1-v}$$

die ja konstant bleiben muss, da $\mathfrak{L}$ t nicht enthält. Bei solchen allgemeineren Probl.en nennt man zweckmässig die Var. ableit.g der Lagra.n Fkt. die Kraft, da man ja eben in ihr den der kinetischen Ener. und den der potentiellen der wirkenden Kräfte zukommenden Bestandteil nicht scheiden kann: die Bewegung erfolgt dann eben einfach so, dass die Kraft stets Null ist. Dem würde in der gewöhnlichen Newtonschen Mech. entsprechen, dass man auch $-mx''$, $-my''$, mz'' die Var. ableit.g der kinetischen Ener., als auf den Punkt wirkende Kräfte ansieht, die dadurch entstehen, dass der Pkt. Masse hat und sich bewegt; die Bewegung erfolgt dann so, dass die Gesammtkraft einschliesslich dieser ($-mx'' + X$) etc. Null ist. Die Reihe solcher physikalischen Probl., die durch ein Var. prin. beschrieben werden, und auf die wir daher

unsere allgemeinen Theorieen der Var. Rech. insbesondere zur Herleitung eines Ener. int $\stackrel{s}{=}$ (Hamil. Fkt.) anwenden können, ohne dass jedoch die Lagra$\stackrel{n}{=}$ Fkt. sich in ein $T - U$ der alten Art spalten lässt, liesse sich noch weiter fortsetzen.

Es liegt nun der Gedanke nahe, dass in Wahrheit alle physikalischen Vorgänge durch Bewegung gewöhnlicher Massenpkte. nach den Gesetzen der Newtonschen Mech., in der

$$L = \frac{1}{2}\sum m_h (x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2) - U(x_1 \cdots z_n)$$

entstehen: hängen sie von Lagra$\stackrel{n}{=}$ Fkt$\stackrel{n}{=}$ komplicierterer Gestalt ab, so ist dies nur scheinbar dadurch, dass nur wenige Par. des Sys$\stackrel{s}{=}$ oder Verbindungen von ihnen die unserer Beobachtung zugänglich Koord$\stackrel{n}{=}$ Bewegung einer grossen Anzahl von Massenpkt$\stackrel{n}{=}$, die gewissen Beding$\stackrel{n}{=}$ unterliegen mögen, verborgen ist, so dass ihre Koord$\stackrel{n}{=}$ bis auf jene Verbind$\stackrel{n}{=}$ aus unsern Beobachtungen vollkommen eliminiert erscheinen. Das typische Beispiel für diese Theorieen ist die Erklärung der Wärmeerscheinungen durch die Bewegung der grossen Zahl von Molekülen

der Körper, die nach den gewöhnlichen mech.
Gesetzen erfolgt; die wenigen Grössen, die
wir in den Wärmeerscheinungen wirklich
wahrnehmen können werden als Mittelwerte
gewisser Ausdrücke der Koord^n dieser vielen
sich bewegenden Massenpkte. aufge-
fasst. Math. Gültigkeit erhalten diese
Theorieen von verborgenen Bewegung^n
durch den Beweis der Möglichkeit
dass man durch Elim. einiger Par. p_i
aus einem Prob. der Newtonschen Mech.
mit der Lagra^n Fkt. $\mathcal{L} = T - U$ (wo T
homogen quad. in den $\dot{p}$) für die rest-
ierenden Par. wieder ein Var. Prob. mit
komplizierteren Lagra-schen Fkt. erhält.
Ein physikalischen Vorgang wäre
in diesem Sinne mech. erklärt; wenn
man seine Lagra. Fkt. in dieser Weise
durch Elim. aus der eines Pkt. sys.
herzustellen im Stande ist. Solche Elim^n
haben wir nun aber gerade in unseren
allgemeinen Erörterungen über Var. rech.
kennen gelernt, und ich habe hier nur
noch über ihre Anwendung zu referieren.
[illegible] einfachsten und wichtigsten Fall
erhalten wir, wenn wir annehmen, dass
einige der Koord. p in $\mathcal{L}$ nicht selbst, son-
dern nur mit ihren Ablt^n auftreten;
das giebt den von Lord Kelvin und Helm-

holtz behandelten Fall der cyklischen Bewegung, der auch das Analogon zur Wärmelehre bildet. Denkt man sich nämlich ein Molekül auf einem kleinen Kreis sich bewegen, so wird seine jeweilige Stellung, die ja nur wenig wechselt, ohne Einfluss auf das System, denn es umgibt ?, und auf Wirkungen nach aussen [illegible]: nur seine Geschwindigkeit wird in Betracht kommen. Wir wollen für die selten vorkommenden Par. y, für die andern z schreiben, und haben dann das Hamil. Prin.

$$\int_{t_1 y_1 z_1}^{t_2 y_2 z_2} \mathfrak{L}(y' z' y)\, dt = \text{Min.}$$

wo $\mathfrak{L}$ $y' z'$ nur homogen quad. enthält. Wir konnten uns dann stets ein Var. Prin. für die y allein herstellen, das verallgemeinerte Jacobische Prin. des § 15. Dazu mussten wir nur aus

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z'} = c$$

z' durch $y' y$ ausdrücken: Da $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z'}$ hier in der Newtonischen Mech. linear homogen in $y' z'$ ist, erhalten wir

$$z' = y' \cdot P_1(y) + P_2(y)$$

Der Integrand des neuen Var. Prob., die neue

Lagran Fkt. für die Koord. y allein ist dann:

$$\mathcal{L}^*(y'\,y) = (\mathcal{L} - c.z')_{z' = y'\varphi_1 + \varphi_2}$$

$$= \mathcal{L}(y', y'\varphi_1 + \varphi_2, y) - c\varphi_1 y' - c\varphi_2$$

und sie hat also bereits nicht mehr genau die Form der Newtonschen Mech. sondern sie enthält ausser quad. Gliedern in y' auch lineare Glieder in y'. Die Überlegung bleibt unverändert, wenn z m Par. p, die nicht auftreten, symbolisiert; dann haben wir m Integrale des Syst. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = c$, die bei gegebenen c m lineare Glⁿ für die m Unbekannten z' darstellen; deren Werte sind in

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \sum c z' \text{ einzutragen.}$$

Die neuen Bewegungsglⁿ für das oder die y ergeben sich aus

$$\int_1^2 \mathcal{L}^* dt = \text{Min} \quad \text{also}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial y} = 0$$

Das Erscheinen linearer Glieder in dem $\mathcal{L}^*$ hat nun eine einfache und interessante Folge. Kehrt man in dem ersten Var. probl., dessen Integrand $\mathcal{L}$ y' z' nur homogen quad. enthält, das Vorzeichen von t um,

so wechseln nur $y' z'$ das Zeichen und da sie nur quad. auftreten, ändert sich das Var. prob. nicht – wir nehmen ja stets an, dass t selbst explicit nicht auftritt. Kann das Sys. also irgend eine Bewegung von 1 nach 2 machen, so kann es auch die umgekehrtee von 2 nach 1 auf dersel-ben Bahncurve machen, die durch Vertauschung von t mit $t_2 - t$ entsteht. Man braucht nur als Anfangsbedn in 2 die umgekehrten Endgeschwindigktn der ersten Bewegung zu geben. Wir können also sagen, dass es die gewöhnliche Mech. unmittelbar nur mit reversiblen Pro-cessen zu tun hat. Ersetzen wir aber in dem durch die Elim. entstandenen Prob. $\int^2 L^* dt$, t durch $-t$, so wird L^* nicht in sich übergehen, da es lineare Glieder in y' enthält: der Vorgang ist also, wenn wir allein die sichtbaren y be-trachten, irreversibel, er würde erst um-kehrbar werden, wenn wir gleichzeitig die verborgenen Bewegungen z umkehren könnten bezw. die sie charakterisier-enden Konstanten c das Zeichen wech-seln lassen würden. Als Beispiele sol-cher Elimn sei auf die am Ende von § 17 aufgestellten Prin. 10° und 11°.

375

verwiesen, die aus der auf geeignete Co-ord$\underline{n}$ transformierten Lagra$\underline{n}$ Fkt. (10$\underline{a}$) bezw. (11$\underline{a}$) durch Elim. der cyklischen Koord. x, bezw. φ, entstanden: sie enthalten die Ableit$\underline{n}$ ξ' bezw. ϑ' linear.

Auf die Elim. mit Hilfe beliebiger Int$\underline{e}$ der Lagra$\underline{n}$ Gl$\underline{n}$, die wir allgemein in § 15 behandelten, und die natürlich auch ~~gestattet~~, dem L der Newtonschen Mech. allgemeinere Gestalten zu geben, will ich hier nicht mehr zurückkommen; ich will vielmehr nur noch 2 andersartige Fälle betrachten, in denen eine Elim. von Koord.$\underline{n}$ z aus $\sum$ möglich ist, die die Gl$\underline{n}$ wieder in die Var. ableit$\underline{n}$ einer Var. Probl$\underline{e}$ in y überführt.

Der eine Fall rührt von Königsberger her (Principien der Mech. p. 145. Durchführung eines Beispiels p. 152). Es mögen in den Var. ableit$\underline{n}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

z und z' ~~nicht auftreten~~, sondern nur z'': das kommt auf besondere Annahmen über den Bau von L hinaus, die aber im Fall der Newtonschen Mech. erfüllt sein können, insbesondere dass die z selbst nur linear ~~auftreten~~, und ihre Koef$\underline{n}$ sowie die der quad. Glieder in z' konstant sind.

Man kann nun z'' aus einer der Gl.^n durch y y' y'' ausdrücken und in die andere umsetzen, die damit in eine Gl. 2 Ord. für y allein übergeht. Königsberger zeigt nun durch direkte Rechnung, dass man aus $\mathcal{L}$ eine Fkt. $\mathcal{L}^*(y'\,y)$ bilden kann, so dass diese Gl. der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial y} = 0$$

annimmt, d. h. dass sie zu einem Var. Prob. $\int \mathcal{L}^* dt$ = Min. gehört: dies gilt, gleichgültig wieviele Fkt^n der Art y und z da sind. Es erscheint also wieder so, als ob man es nun mit den Koord.^n y zu tun hat, während die z verborgen sind; $\mathcal{L}^*$ hat nicht mehr die Form der Newtonschen Mech. sondern kann wesentlich komplicierter sein.

Ich will endlich noch einen letzten Fall angeben den Helmholtz entdeckt hat. (Physikal. Bedeut. des Prin. d. kleinsten Wirkung. Wissensch. Abh. Bd. III p. 212 –) Es wird gefragt, ob es nicht Beweg.^n giebt, bei denen z = Const. ist, und man sucht dann für die zugehörigen Fkt. y ein Var. prob. aufzustellen; Helmholtz nennt d. entstehenden Prob. für y unvollständige Prob.^e, da sie nicht alle ursprünglich

möglichen Beweg.^{n} entsprechen. Wir müssen nun annehmen, dass in $\mathfrak{L}$ keine Terme vorkommen, die Produkte der Ableit.^{n} beider Arten von Koord.^{n} (y' z') enthalten, d. h.

$$\mathfrak{L}_{y'z'} = 0$$

Da $\mathfrak{L}$ ~~[illegible]~~ quad. in y' z' ist, wird daher $\mathfrak{L}_{z'}$ alleine eine lineare Fkt. der Ableit. z' (bezw. der verschiedenen z') und wenn wir $z' = 0$ setzen, verschwindet es.

Die Var. ableit.^{n} von $\mathfrak{L}$ gehen daher, wenn wir $z = \text{Const}$, $z' = z'' = 0$ setzen, über in:

Umk. eign. $\rightarrow$ $$(\mathfrak{L}_{y'y'}\, y'' + \mathfrak{L}_{y'y}\, y' - \mathfrak{L}_y)_{z'=0} = 0$$

$$\mathfrak{L}_z)_{z'} = 0$$

Berechnen wir aus der zweiten Gl. $z = z(y'y)$ und setzen es in die erste ein, so entsteht eine Diff. gl. 2 Ord. für y (bezw. mehrere, wenn mehrere y da sind). Eine leichte Rechnung ergiebt dass sie wieder in der Form einer Var. ableitung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial y} = 0$$

geschrieben werden kann, und zwar entsteht $\mathfrak{L}^*$ gerade durch die gleichen Sub.^{n} $z' = 0$, $z = z(y' y)$ aus $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L}^*(y'y) = \mathfrak{L}(y', 0, y, z(y'y))$$

Die Gl. $\mathfrak{L}_{z})_{z'=0} = 0$ kann z als sehr komplicierte Fkt. von y' liefern, und da $z = z(y' y)$ obendrein auch in den zweiten Summanden $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{L}$ einzusetzen ist, kann jetzt $\mathfrak{L}^{*}$ in y' sehr kompliciert werden und insbesondere braucht eine Abtrennung einer Fkt. von y' gar nicht mehr möglich zu sein.

Von dem Studium der Lagrangeschen Fkt. aus können wir nun leicht zum math. Verständnis der merkwürdigen, in der Physik eine so grosse Rolle spielenden Reciprocitätsgesetze gelangen. Wir denken uns ein durch ein Variationsprinzip beschriebenes, also durch eine Lagrangesche Fkt. charakterisiertes physikalisches Phänomen; wir wollen nicht, wie bisher, fragen, wie man den Vorgang auf die Bewegung zahlreicher Massen nach den Gesetzen der Newtonschen Mech. zurückführen kann, sondern wollen jetzt direkt zusehen, was man physikalisch aus der Existenz der Lagrangeschen Fkt. in der sichtbaren und kontrollierbaren Par. erschliessen kann. Wir stellen gewissermassen als einziges Axiom auf:

377

„Der Vorgang wird durch ein Min.-Prinz., einer Lagra[E] Fkt. beschrieben" und wir werden sehen, dass sich allein daraus eine ganze Reihe neuer Sätze, die direkt experimentell zu prüfen sind und Bestätigung gefunden haben, sich herleiten lassen. Diese sog. Reciprocitätssätze sind ungefähr gleichzeitig von J. J. Thomson (Phil. Trans. 1885, 1887) und Helmholtz (1886 Wissensch. Abh. Bd III) entdeckt worden; eine ausführliche Darstellung der hierhin gehörigen Untersuchungen findet man in dem ausgezeichneten Buche von

J. J. Thomson, Anwendungen der Dynamik auf d. Physik. (Cambridge 1886), das sich fast wie die Anfänge einer Axiomatik der Physik und Chemie liest. Es werden hier genau die Folgerungen aus der einzigen Annahme der Existenz einer Lagra[E] Fkt. in math. durchaus befriedigende Weise gezogen, und die physikalischen Consequenzen dann bis ins Einzelne untersucht, und die experimentellen Bestätigungen nachgewiesen. Als Beispiel der hierbei herauskommenden physikalischen Sätze die sich übrigens auch bei Helmholtz finden, nenne ich etwa das Peltiersche Phänomen:

"Wenn Erwärmung einer Stelle einer geschlossenen Leitung einen elektrischen Strom hervorbringt so wird derselbe Strom dort Kälte entwickeln" und stets werden wir solche [illegible] Bez.n zw. 2 versch. Pa. (od. ihren zeitlichen Änderungen) des ~~Syst~~ Systems + den Kräften, die vermöge ~~d~~ Bewegungen [illegible] sie zu ~~ändern~~ streben haben. Ich kann hier jedoch nur den math. Inhalt dieser Recipr. gesetze ausführen der sehr einfacher Natur sind.

Die Lagr. Fkt. sei $\mathcal{L}(y'z'yz)$; y, z seien irgend welche Par., die den geom., elektr., magn., chem., oder dgl. Zustand des betrachteten Sys.s beschreiben + über die wir durchaus keine näheren Annahmen zu machen brauchen. Es mögen nun auch äussere Kräfte $Y = -\frac{\partial U(yzt)}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ auf das Sys. wirken, sodass ihr Pot. U noch im Var. Prob. für Bew. zu L hinzutritt

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\mathcal{L}(y'z'yz) - U(yzt)\}\, dt = \text{Min.}$$

Die Lagr. Gln., die unsern phys. Vorgang beschreiben sind daher:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = Y; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = Z \qquad (A)$$

381

Betrachten wir nun den Zustand des Sys^e in irgend einem best. Moment in der Lage $y\ z$ mit den Geschw'n $y'\ z'$ + den Beschl^n $y''\ z''$, so ergiebt Ausführung der Diff. nach t in den letzten Gl^n den folg. Ausdruck der auf die Par. $y\ z$ wirkenden Kraftkomp'^n $Y\ Z$ durch jene Daten:

(B)
$$Y = \mathfrak{L}_{y'y'}\, y'' + \mathfrak{L}_{y'z'}\, z'' + \mathfrak{L}_{y'y}\, y' + \mathfrak{L}_{y'z}\, z' - \mathfrak{L}_{y}$$
$$Z = \mathfrak{L}_{y'y'}\cdot y'' + \mathfrak{L}_{z'z'}\, z'' + \mathfrak{L}_{z'y}\cdot y' + \mathfrak{L}_{z'z}\, z' - \mathfrak{L}_{z}$$

Nun machen wir nach Helmholz folg. Überleg^n:

1) Wir denken uns den Vorgang so verändert, dass im betrachteten Moment die Koord^n $y\ z$ + die Geschw^n $y'\ z'$ ~~unverändert~~ bleiben, hingegen die Besch^n $y''\ z''$ varieren; dann sind die Kräfte $Y\ Z$ nach (B) lineare Fkt^n dieser + es folgt sofort:

I
$$\frac{\partial Y}{\partial z''} = \frac{\partial Z}{\partial y''} = \mathfrak{L}_{y'z'}$$

Das ist bereits das erste Helmholzsche Reciproc. gesetz: Bei im übrigen verändert bleibender Beweg. lässt eine Änderung der Beschl. z'' die Kraftkomp. Y um ebensoviel wachsen,

wie eine gleiche Änderung von y'' die Z
Das giebt bereits viele wichtige physik. Gesetze, wenn es auf best. Vorgänge anwendet, wie man bei Helmholtz und Thomson nachlesen möge.

2) Wir halten y, z, y'' z' fest variieren allein die Geschw. y' z'. Dann ist

$$\frac{\partial Y}{\partial z'} = \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{y'z}) + \mathcal{L}_{y'z} - \mathcal{L}_{yz'}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y'} = \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{y'z'}) + \mathcal{L}_{z'y} - \mathcal{L}_{zy'}$$

und daher

$$\frac{\partial Y}{\partial z'} + \frac{\partial Z}{\partial y'} = 2\frac{d\mathcal{L}_{y'z'}}{dt} = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Y}{\partial z''}\right) = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Z}{\partial y''}\right) \qquad \text{II}$$

Ist speziell, wie in der Physik sehr häufig, $\mathcal{L}_{y'z'} = \text{Const}$ so hat man ganz analog zu I:

$$\frac{\partial Y}{\partial z'} + \frac{\partial Z}{\partial y'} = 0 \qquad \text{II}^{a}$$

was wieder viele Anwend. hat.

3) Hält man endl. die Ableit. y' z' y'' z'' fest variiert allein die Lage y z so folgt aus (A):

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{d\mathcal{L}_{y'z}}{dt} - \mathcal{L}_{yz}\,; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{d\mathcal{L}_{z'y}}{dt} - \mathcal{L}_{yz}$$

und daher als 3 Gesetz:

III $\quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{L}_{y'z} - \mathcal{L}_{z'y}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Y}{\partial z'} - \frac{\partial Z}{\partial y'}\right)$

Ist $\mathcal{L}_{y'z} - \mathcal{L}_{z'y}$ = Const. oder gar 0, was stets bei ~~rotierenden~~ ruhenden Sysn der Fall ist so folgt:

III[a] $$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

was bei ruhenden Sysn wegen der Existenz des Pot. U ja selbstverständlich ist.

Man wird nun die Frage ~~stellen~~ ob man aus der Annahme einer Lagr. F nicht noch mehr solche neue Gesetze ableiten kann, oder ob diese 3 Sätze (I) (II) (III) schon das vollst. Sys. von Folgerungen aus jenem einen Ax. bilden, + ihm umgekehrt bereits wieder aequiv. sind. Mit diesem ganz im Geiste der modernen Axiomatik liegenden Frage hat sich bereits Helmholz beschäftigt, + er hat (für beliebig viele Koord. y z) ohne Beweis den Satz ausgesprochen: Genügen Fktn Y Z von y ---z'', die in y'' z'' linear sind, den Gln I II III, so lassen sich sich in der Form (A) oder (B) als Var. ableitn einer geeigneten Lagrn Fkt. $\mathcal{L}(y'z'yz)$ darstellen, d. h. die 3 Reciproci gesetze sind

auch hinr. Bed.^n dafür, dass ein Physik. Vorgang durch eine Min. forderung nach Art des Hamil. Prin.^s beschrieben werden kann. Den Beweis dafür hat Königsberger nach dem Helmholtzschen Nachlass publiciert (Berliner Sitzungsberichte 1905)

Ausser diesen Gesetzen hat Helmholtz (Abh. Bd. III) noch eine ganz andere Art von Recip. formeln, die ich noch kurz characterisieren will. Ich halte mich dazu an den Fall dreier Unbek. (Bew. eines Pkt. im Raume)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}(x'y'z'xyz)\,dt = \text{Min.} \qquad \text{Q.}(3)$$

Wir hatten früher das Unabh. Int. als Fkt. der oberen Grenze untersucht:

$$F(xyz;t) = \int_{t_1, x_1, y_1, z_1}^{t\,x\,y\,z} \left\{ \mathfrak{L} + (x'-p)\mathfrak{L}_p + (y'-q)\mathfrak{L}_q + (z'-r)\mathfrak{L}_r \right\} dt$$

das der Jacob. Ham. Dgl. genügte:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x'}, \frac{\partial S}{\partial y'}, \frac{\partial S}{\partial z'}; x y z\right)$$

(vgl. § 15) & für das wir stets

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \mathfrak{L}_p = \pi; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \mathfrak{L}_q = \kappa; \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \mathfrak{L}_r = \rho$$

gesetzt hatten; die Abh. kt. von t interessiert uns hier nicht. Erstrecken wir das Unabh. Int. auf einer Bahnkurve $x' = p$; $y' = q$; $z' = r$ so wird

3. T5

$$S(x y z) = \int^{x y z t} \mathcal{L}(x' y' z' x y z)\, dt$$

d. h. es wird einfach der Wert des zum Min. zu machenden Intgr. als Fkt. des oberen Endpkts.. Wir wollen nun aber diesen Int. wert als Fkt. der oberen + unteren Grenze betrachten

$$S(x_1 y_1 z_1 \quad x_2 y_2 z_2) = \int_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} \mathcal{L}(x' y' z' x y z)\, dt$$

auf einer Bahncurve zw. diesen Pkten erstreckt; das würde geom. der geodät. Entf. zweier Pkte. auf einer Fläche als Fkt. beider Pkte. aufgefasst, entsprechen. Das kommt darauf hinaus, dass wir eine dreipar. Lösungsschaar der Ham. Gl. betrachten, die als Fkt. der Par. wieder wesentlich derselben Gl. genügt. Wir haben dann, wenn wir die Werte von Grössen an den Pktn 1, 2 durch entspr. Indices bezeichnen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \Pi_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} = k_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_2} = S_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \Pi_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y_1} = -k_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} = -S_1$$

wo die Negativen Zeichen wegen der Difftion nach der unteren Grenze auftreten. Die Π, K, S_1 sind mit den Geschwktn p, q, r, in 1 durch die Gln $F_p = \Pi$ etc. verbunden und bestimmen sich mit diesen gegenseitig

wir werden sie später als Impulse der Pkt Beweg. oder als Stösse, die dem Pkte momentan aus der Ruhe die augenblickl. Geschw. erteilen würden, erkennen. $\Pi_1 K_1 P_1$ geben also den Impulse, den der Pkt. in 1 haben muss, um nach 2 zu gelangen, und analoges gilt von $\Pi_2 K_2 P_2$, und beides sind Fkt^n von $x_1 \cdots z_n$. Nun gilt:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial K_2}{\partial y_1} + \frac{\partial K_1}{\partial y_2} = 0 \quad \frac{\partial P_2}{\partial z_1} + \frac{\partial P_1}{\partial z_2} = 0 \text{ etc.}$$

und den Inhalt dieser Relationen kann man etwa so ausdrücken: Ändert man nur die Ausgangslage 1 des Pktes, so kommt er in 2 mit einem veränderten Impulse an der den Betrag des Stosses angiebt, welcher ihn wieder in die ursprüngliche Bahn zurückdrängen würde; dieser Stoss ist nun gerade entgegengesetzt gleich demjenigen, den man dem Pkte. in 1 erteilen müsste, um statt der ursprünglichen Bahn eine jene Änderung des Ziels 2 zu erlangen. Auch diese Thatsache benutzt Helmholz zur Anwendung auf phys. Probl^e. Damit schliesse ich diesen Abschnitt, der uns den Weg zu einer axiomatischen Behandlung der Mech. + Physik

kenntlich machte, wie man sie in der Geom. Länge benützt: so interessant die hier sich eröffnenden Fragen sind, so sind sie doch noch nicht durchgearbeitet genug, um eine eingehendere Behandlung an dieser Stelle zu ermöglichen.

§19. Das Gleichgewicht.

Speciell Fall der Beweg. – Ruhe – noch nicht behandelt. Wir nehmen ein beliebiges von n freien Par. $p_1 - - p_n$ abhängiges mech. Syst. an, dessen Hamil. Princip:

$$\int_A^B \mathfrak{L}\, dt = \int_A^B \{T(p_1' \dots p_n', p_1 \dots p_n) - U(p_1 \dots p_n)\}\, dt = \text{Min.}$$

lautet, wo T homo. quad. in den p' sei; die Lagran. Gl.n sind:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_h} + \frac{\partial U}{\partial p_h} = 0 \qquad h = 1 \dots n$$

Um zu sehen, für welche Werte der p das Syst. ruhen kann, d. h. welche Werte $p_h = \text{const.}$ diesen Gl.n genügen, setzen wir $p_h' = 0$ ein + finden, da $\frac{\partial T}{\partial p'}$ + $\frac{\partial T}{\partial p}$ homo. (lin. bezw. quad.) in den p' sind:

1) $$\frac{\partial U}{\partial p_1} = 0 \; - - - \; \frac{\partial U}{\partial p_n} = 0$$

Ruhe (Gleichgewicht) kann nur für solche Lagen des Syst.s herrschen, für die die Ableit.n der tot. pot. Ener. nach den unabh. Par.n verschwinden

Wir wollen diese Bed^n auch für die rechtwink. Koord^n $x_1 \dots z_n$ der im System plte. herleiten, die den Bed'nsgl^n

$$f(x_1 \dots z_n) = 0 \qquad g(x_1 \dots z_n) = 0 \text{ etc}$$

unterliegen. Dann lauten die Bew'sgl^n bekanntlich $m_h x_h'' = -\frac{\partial U}{\partial x_h} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_h} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_h} + \dots$ etc

$h = 1 \dots n$, und als notwendig Gleichgewichts-bed. erhalten wir, wenn wir $x_1'' = y_1'' = \dots = z_n'' = 0$ setzen:

$$\frac{\partial(U + \lambda f + \mu g)}{\partial x_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial(U + \lambda f + \mu g)}{\partial z_n} = 0 \quad (2)$$

d. h. es giebt Lagran^n Faktoren $\lambda \mu$ so dass für die den Bed^n $f = 0$ $g = 0$ .... genügende Gleichgewichtslage die Ableit^n von $U + \lambda f + \mu g + \dots$ nach den $3n$ Koord^n verschwinden. Die Identität dieser Bed^n mit (1) kann man auch ohne Rechnung einsehen; sie sind nämlich bekanntlich nichts als die notw. Bed^n des Min. der Fkt. $U(x_1 \dots z_n)$ während die Nebenbed^n $f = g = \dots = 0$ erfüllt sind und (1) sind die notw. Bed^n des absolut Min der Fkt. $U(p_1 \dots p_r)$. Da diese unabh. Par. p aber gerade jene Nebenbed^n auflösen, so ergeben sich beide Bed^n als

äquiv. Gleichgewicht ~~kommt~~ herrscht also wenn die notw. Bed^n des Extremums der pot. Ener. unter den Zwangsbed^n des Sys. erfüllt sind – Gleichgewicht im allg'sten Sinne verstanden dass Ruhe des Sys. mit den Bewegungsgl^n verträglich ist, d. h. dass das Sys. einmal festgehalten in dieser Lage sich ohne äussern Anstoss nicht in Beweg. setzen kann. Wir können nun aber auch einen schärfern Begriff des Gleichgewichts aufstellen wobei wir zugleich einen Zusammenhang auch mit den hinr. Bed^n des Min. im U (Ungleichungen) erhalten werden.

Wir grenzen um die Gleichgewichtslage (im bisherigen Sinne) jedes Systempunkts ein kleines Gebiet ab, oder – was auf dasselbe herauskommt wir best. im Raume der Par. $p_1 \dots p_n$ des Sys. eine kleine Umgebung des jener Gleichgew. Lage entsprechenden Pkts. $p_1^0 - p_n^0$ der also der Gl. (1) genügt); bleiben dann die Sys pkte., sofern man ihnen in der Gleichgew. Lage eine beliebige, nur unter einer hinr. kleinen Grenze liegende Anfangsgeschw. ertheilt, stets in jener beliebig kleinen Umgebung, d. h. bleiben die Lagen p des Sys. die durch solche Beweg. bei hinr. kleinen p_0^1 entstehen, stets in jener Umgebung von p^0, so heisst die Gleichgewichtslage stabil. Im

Gegensatz dazu heisst das frühere weitere Gleichgew. labil. Der Unterschied ist, kurz gesagt, der dass bei labilem Gleichgew. zwar Ruhe herrschen kann, aber ein beliebig kleiner Anstoss des Sys. schon eine endl. Beweg. bewirken kann, während im stabilen Falle ein hinr. kleiner Anstoss nur eine beliebig kleine maximale Abweichung a. d. Gleichgew. lage erzielen kann; da in der Natur kleine Anstösse immer vorhanden sind, so wird nur das stabile Gleichgew. wirkliche Bedeutung haben, während labiles meist sofort wieder zerstört werden wird.

Das stabile Gleichgew. beherrschen wir math. vollkommen durch den wichtigen

Satz von Dirichlet: Stabiles Gleichgew. findet da ... statt, wenn die pot. Ener. ein wirkliches Min besitzt.

Es besitze U für $p_h = p_h^0$ $(h = 1 \ldots n)$ ein wirkliches Min., dessen Wert U_0 wir wegen der für U willk'n additiven Konstanten gleich Null setzen können; dann wird bei hinr. kleinem ε die Gl.

$$U(p_1 \ldots p_n) = \varepsilon$$

im allg. geschlossene den Pkt. p^0 ~~umgekehrt~~ umgebene Fläche darstellen + ein Gebiet G von Lagen des Sys. in der Umgebung

der Lage p^0 abgrenzen. Wir erteilen nun dem Syz. eine Anfangsgeschw. $p_1^{0\prime} \dots p_n^{0\prime}$ sodass die dadurch gegeb. kinetische Ener.

$$T_0 = T(p_1^{0\prime} \cdots p_n^{0\prime}) \leqq \varepsilon$$

wird. Dann ist nach dem Ener. satz für die dadurch bestimmte Bew. zu jeder Zeit:

$$T + U = \text{Const} = \mathcal{E}$$

+ die Ener. Konst. ist ~~da~~durch die Anfangslage gegeben.

$$\mathcal{E} = T_0 + U_0 = T_0 < \varepsilon$$

Jetzt ergiebt sich sofort, dass das Syz. nur Lagen in G annehmen kann; denn sonst müsste es, bevor es G verlässt, eine Randlage $U = \varepsilon$ erreichen, + dort wäre nach dem soeben aufgestellten Ener. satz

$$T = T_0 - U = T_0 - \varepsilon < 0$$

Das ist aber unmöglich, da T seinem Wesen nach eine pos. definite quad. Form ist $\left(= \sum_{h=1}^{n} m_h (x_h'^2 + y_h'^2 + z_h'^2)\right)$. Also bleibt das Syz. bei jeder Bew. aus der Gleichgewichtslage, für die nur $T_0 < \varepsilon$ ist, in der vorgegebenen Umgebung G der Gleichgew.-lage, wodurch die Stabilität bewiesen ist. Die Umkehrung wird später leicht aus der Th. der kleinen Schwingn. folgen.

Eine Anwendung ist folgendes: Denken wir uns einen Massenpkt. der Newtonschen Attraktion mehrerer fester Centra m_1, m_2 ... unterworfen, so ist seine Pot. Energ.

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots$$

wo $r_h = \sqrt{(x_h - x)^2 + (y \quad)^2 + (z \quad)^2}$ die Entf. des m_h von $x/y/z$ ist. Als Fktion $x\,y\,z$ ist dann U bekanntlich eine Pot. f im eigentlichen Sinne, d. h. es genügt

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\quad}{y} + \frac{\quad}{z} = 0$$

Nach einem der ersten Sätze der Pot Th. hat ein solches Pot. aber niemals ein Min., also kann ein Pkt. der nur Newtonschen Gravitationskräften unterliegt niemals im stabilen Gleichgew. sein, labiles wird natürlich möglich sein. Üben die fest. Pkte. hingegen etwa elastische Kräfte aus, wo $U = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$ so kann wohl stabil Gleichgew. stattfinden, da dies U wirklich ein Min. werden kann.

Wir kommen nun zu der Th. der kleinen Schwingungen, die zuerst Lagrange mit klassischer Vollständigkeit aufgestellt hat, & die wir jetzt unter Voraussetzung des Ham. Prin^s in einfachster Weise erledigen können

Es handelt sich um die Frage wie sich ein Sys. bewegt, wenn man ihm in einer stabilen Gleichgew. Lage einen kleinen Anstoss erteilt; dass die Beweg. in beliebigen Nähe verlaufen muss, wissen wir bereits. Ohne Beschränkung der Allg.heit können wir annehmen, dass die fragliche Gleichgew. Lage durch $p_1 = p_2 = \cdots p_n = 0$ gegeben ist, + dann das Min. wert $U = 0$ ist. Dann bleiben während der ganzen zu untersuchenden Beweg. die p beliebig klein, wie ja auch die p' beliebig klein bleiben (wegen des Ener. satzes $T + U = T_0 < \varepsilon$. Wir werden also die Beweg. in beliebigen Annäherung erhalten, wenn wir im Ham. Prin.

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \text{Min.}$$

für $T + U$ nur die Glieder niederster Dim. in den p p' beibehalten. Nun ist, da $U = 0$ + $\frac{\partial U}{\partial p_n} = 0$ (als notw. Bed. des Gleichgew.)

$$U = \sum_{h,k=1\cdots n} A_{hk}\, p_h\, p_k + \cdots$$

Den Fall, dass alle $A_{hk} = 0$ schliessen wir hier aus, + können dann U diesen quad. Gliedern allein gleich setzen. Die Kin. Ener.

ist in p' quad.;

$$T = \sum_{h,k=1\dots n} \varphi_{hk}(p_1 \dots p_n)\cdot p'_h p'_k$$

wo $\varphi_{hk} = a_{hk} + \sum_{i=1\dots n} b_{hk}^{(i)} p_i + \dots$ + [illegible] ten die niedersten Glieder von der gleichen Grössenordn. wie jene von U, wenn wir von dem φ nur die Glieder 0ter Dim. nehmen u. also setzen

$$T = \sum_{h,k=1\dots n} a_{hk}\, p'_h p'_k$$

Nun sind T U quad. Formen, [illegible] Koeff. in den p' bezw. p. Subst. wir die Par. p linear homo. in neue Par q:

$$p_h = \mathfrak{L}_h(q_1 \dots q_n) = \sum_{k=1\dots n} l_{hk} q_k$$

sodass invers die q bekannte lineare Combinationen $\mathfrak{L}^*_h(p)$ der p sind, so hängen die Ableitn. p' mit denen q' offenbar durch dieselbe lin. Relationen zusammen:

$$p'_h = \mathfrak{L}_h(q'_1 \dots q'_n)$$

Die Variablen der 2 quad. Formen p, q erleiden also die gleiche Substn. Nach dem Hauptsatz der Th. der quad. Formen kann man daher die Subst. $\mathfrak{L}_h$ so bestimmen, dass sowohl T als U in ein Aggregat von Quadraten der neuen Varn. q' bezw. q übergeht:

375

denn man kann stets 2 beliebig Formen durch eine reelle Trans. in solch. quadrate ... Da aber weiter T eine pos. definite Form ist, kann man es erreichen, dass sogar einfach

$$T = q_1'^2 + q_2'^2 + \dots + q_n'^2$$

wird, während

$$U = k_1 q_1^2 + k_2 q_2^2 + \dots k_n q_n^2$$

werde. Hat nun U für $p_h = 0$ denen die entspricht, ein wirkliches Min., sollte $q_h = 0$ entspricht, ein wirkliches Min., so muss für alle andern q $U > 0$ sein: + daher müssen alle Koeff^{n} k pos. sein; sonst bei labilem Gleichgew. können einige der k neg. sein. Wir brauchen die Beweg. Gl^{n} nur für die q, von denen sich die p ja nur durch eine unwesentliche linear. Trans. unterscheiden, obendrein waren ja die p bereits wesent. willk. gewählte Par. Wir erhalten sie als Var. ableit^{n} von

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

in der einfachsten Gestalt

$$q_1'' + k_1 q_1 = 0 \; \dots \dots \; q_n'' + k_n q_n = 0.$$

Diese Gl^{n} können wir sofort integr. + finden

$$q_h = C_h \sin \sqrt{k_h}\, t + C_h' \cos \sqrt{k_h}\, t \quad (h = 1 \dots n)$$

Soll für $t = 0$ $q_h = 0$ sein, so ist $C_h' = 0$, während C_h die Anfangsposition giebt. Sind nun alle $k_h > 0$ wie das bei stab. Gleichgew. ($U = U_{min}$) der Fall ist, so macht das Syst. bei kleinen Anstössen Sinusschwing'n in beliebiger Nähe der Gleichgew. lage, da stets $|q_h| < C_h$ ist – wir haben die durch den Dirichletschen Satz geforderte Beweg. um die Min. lage von U nun angenähert bestimmt. Die Periode der Koord.n q_n ist $\frac{2\pi}{\sqrt{k_h}}$. Ist U kein wirkliches Min., so sind einzelne k negativ, etwa $k_1 < 0$. Dann ist das reelle Int. der ersten Gl.

$$q_1 = C_1 e^{\sqrt{-k_1}\,t} + C_1' e^{-\sqrt{-k_1}\,t}$$

Auch hier kann von selbst d. h. wenn ~~$q_1 = 0$~~ $q_1(0) = C_1 + C_2 = 0$ $q_1'(0) = \sqrt{-k_1}\,C - \sqrt{-k_1}\,C_1' = 0$ keine Beweg. eintreten ($C_1 = C_2 = 0$); wohl aber ~~tritt~~ schon für beliebig kleines $q_1'(0)$ eine aperiodische Beweg. ein, im Laufe deren q_1 beliebig grosse Werte erhält. Das würde mit stabilem Gleichgew. im Widerspruch stehen, das fordern würde, dass die Beweg. und daher auch die hier approx. bestimmten q beliebig klein bleiben. Also kann stabiles Gleichgew. nicht eintreten,

wenn U kein wirkliches Min. ist – wenigstens unter der hier gemachten Voraussetzung, dass U quadr. Glieder in p enthält. Damit haben wir die hauptsächlichen Gesichtspkte. der Th. der kleinen Schwing.^{en} erledigt. Es sei zum Schluss noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass wir die Stabilität der Gleichgew. bei einem wirklichen Min. von U allein aus dem Ener. satze $T+U=\text{Const.}$ unter Benutzung des definiten Characters von T ohne weitere Heranziehung der Beweg.^{s} gl.^{n} oder dgl. ~~bel~~ bewiesen haben. Es folgt auch allein daraus dass dann von selbst (ohne Anfangsgeschw.) keine Beweg. eintreten kann, dadurch eine Beweg. T und U positiv würden, während doch $T+U=T_0=0$ ist. Diese Tatsache, dass das Stabilitäts kriterium allein aus dem Ener.satz folgt, ist in vielfacher Hinsicht interessant.

§ 20. Th. der Stösse + Impulse

Considered 1st elastischen Stoss.
2nd. Kugeln m_1 m_2 durchaus unelastisch sind.

Then general case;

Ein Massenpt. möge einer Kraft X Y Z unterliegen die in der Zeit von t_1 bis $t_1 + \tau$ sehr grosse Konst. Werte annimmt, die für $L\, \tau = 0$ gegen ∞ konv.^{n} so jedoch dass die Grenzwerte

$$\underset{\tau=0}{L}\, \tau . X = A \quad L = B \quad L = C \qquad I$$

endl. best. Werte haben. Ist übrigens $X = Y = Z = 0$ für $t < t_1$ + $t > t_1 + \tau_1$ so wird die Bahnkurve Gerade sein, wie im Figur + nur im Interval (t_1 $t_1 + \tau$) eine schärfere + schärfere Krümm. besitze, die für $\tau = 0$ schliesslich gegen eine Ecke + eine plötzliche Geschw. änderung im Plate $t = t_1$ konv.^{t}. Etc. as in Osgood;

by Mittelwertsatz

$$m[u] = A \quad m[v] = B \quad m[w] = C \quad (2)$$

wo [ ] den Sprung der Geschw. komp.^{n} u

u v w an der Stelle $t = t_1$ bezeichnen. Den Vektor (mu, mv, mw) bez. man als Beweg. grösse des Pkts. & es ergibt sich, dass seine Änderung an der Unstetigkts-stelle gerade gleich dem Vektor $A|B|C$ des Impulses oder Stosses ist.

Verallg. auf mehrere Pkte., die auch Bed.^{n} unterliegen können. Beschr. auf den Fall, dass der Stoss den Körper in der Ruhe trifft, die Geschw.^{n} vorher Null sind. Dann lauten die Formeln (2)

$$mu = A \quad mv = B \quad mw = C$$

wo u v w schlechtweg die Geschw. Komp.^{n} nach dem Stosse sind. Führen wir die kin. Ener.

$$T = \frac{1}{2} m (u^2 + \cdots)$$

ein so lauten die Formeln

$$\frac{\partial T}{\partial u} = A \quad \frac{\partial T}{\partial v} = B \quad \frac{\partial T}{\partial w} = C$$

Diese Formen sind es nun, die allg.^{e} Geltung haben. Haben wir irgend ein Pktsyst., dessen kin. Ener. T eine quad. Form der Geschw'n $\dot{p}_h$ der n Freiheitsgrade p_h $(h = 1 \dots n)$ ist, so wird ein Stoss auf das Sys. durch die n Impulse-

Koord^n P_1 -- P_n in Bezug auf die n unabh. Par. gegeben. Die Geschw'n die das Sys. an einer best. Stelle p_1 -- p_n aus der Ruhe heraus durch einen solchen Stoss annimmt werden dann eindeutig best. durch n lineare Gl^n

$$\frac{\partial T}{\partial p_1'} = P_1 \quad - - - - \quad \frac{\partial T}{\partial p_n'} = P_n \qquad (3)$$

wo die linken Seiten lineare homo. in den Unbekannten $p_1' \dots p_n'$. (Auf rechtwinklig Koord^n zwischen den Bed^n $f = 0$ etc., sind als lineare Gl^n für die durch den Stoss erzielten Geschw^n x_1' ---

$$m x_1' = X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots \text{etc.}, \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1' + \dots \qquad (3')$$

$= 0$ etc.

Man kann nun die Gl^n (3) durch eine sehr interessant Max.forderung ersetzen. Dazu bilden wir zunächst aus ihnen durch Komposition mit $p_1' \dots p_n'$ die Gl.

$$T = \frac{1}{2}(p_1' P_1 + \dots + p_n' P_n) \qquad (4)$$

die wir als Satz der Erhaltung der Ener. für den Stoss auffassen, indem wir die rechts stehende Summe als Pot. Ener. des Stosses auffassen. Man überlegt sich in der That leicht, dass diese Formel bei dem Grenzübergang von der kontinuierlichen Kraft zum Stoss, wie im einfachsten Falle gerade aus dem gew. Ener.satz entsteht. Wir werden nun zeigen, dass die Gl^n (3) ident. sind mit dem

Bertrandschen Maximalprincip: Eine ruhendes Pkt Sys. erhält durch einen Impuls P_1 -- P_n eine solche Geschw. p_1' --- p_n', die kin. Ener. T zum Max. macht verglichen mit allen Geschw^n, die dem Ener.satz genügen.

(4) $T - \frac{1}{2}(p_1' P_1 + \text{----}) = 0$

Wir leiten zunächst die notw. Bed^n dieses Max. ab, indem wir die Ableit^n von

$T + \lambda(T - \frac{1}{2}(\quad))$

nach p_1' ... p_n' gleich Null setzen:

$$\frac{\partial T}{\partial p'_h} + \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial p'_h} - \frac{1}{2} P_h\right) = 0 \quad h = 1 \dots n \qquad (a)$$

Mult. wir das mit p'_h + summieren über h, so erhalten wir in Rücksicht auf (4):

$$2T + 2\lambda T - \lambda T = 0 \quad \text{or } \lambda = -2$$

∴ Gln (a) gehen in (3) über. Wir wollen nun aber weiter zeigen, dass die Lösung p' von (3), die ja selbstverst. (4) genügen, T auch wirklich grösser machen, als jede andere (4) genügende Grössensyst.

$q'_1 \dots q'_n$

$$T(q') - \frac{1}{2}(q'_1 P_1 + \dots q'_n P_n) = 0 \qquad (\overline{4})$$

T ist eine def. quad. Form, also ist auch

$$T(p'_1 - q'_1, \dots \dots p'_n - q'_n) > 0$$

was wir wegen der ~~Homogenität~~ von T schreiben können:

$$(p'_1 - q'_1)\frac{\partial T(p' - q')}{\partial p'_1} + \dots (p'_n - q'_n)\frac{\partial T(p' - q')}{\partial p'_n} > 0$$

Da die Ableit'n von T linear homo. Fkt'n sind so ist:

$$\frac{\partial \mathsf{T}(p'-q')}{\partial p_h'} = \frac{\partial \mathsf{T}(p')}{\partial (p_h')} - \frac{\partial \mathsf{T}(q')}{\partial (q_h')}$$

und daher schreibt sich die letzte Ungl., wenn wir noch

$$\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p_h'} = P_1 \quad \text{aus (3) einsetzen:}$$

$$\sum_{h=1\cdots n} \left\{ (p_h' - q_h') P_h - p_h' \frac{\partial \mathsf{T}(q')}{\partial q_h'} \right\} + 2\mathsf{T}(q') > 0$$

Nun ist nach (3) und $(\overline{4})$

$$\sum p_h' \frac{\partial \mathsf{T}(q')}{\partial q_h'} = \sum q_n' \frac{\partial \mathsf{T}(p')}{\partial p_n'} = \sum q_h' P_h = 2\mathsf{T}(q')$$

also bleibt nur

$$\sum_{h=1\cdots n} (p_h' - q_h') P_h > 0$$

oder nach (4) $(\overline{4})$

$$2\mathsf{T}(p') - 2\mathsf{T}(q') > 0$$

d. h. $\mathsf{T}(p')$ ist ein wirklicher Max.

